

1) La force est centrale car dirigée toujours vers le proton :  $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = -\overrightarrow{grad} W_p \rightarrow W_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

2) On applique la deuxième loi de Newton à l'électron :  $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}} \rightarrow W_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \rightarrow W_m = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$   
 $mrv = \sqrt{\frac{mre^2}{4\pi\epsilon_0}} = n\hbar \rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2$  Le niveau fondamental est  $n = 1 \rightarrow -W_0 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -14 \text{ eV}$

3)  $E_c = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = 5,8 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $P = \frac{W_T}{T} = 2 \cdot 10^{10} \text{ W}$  (Cible gaz) ;

Cette puissance se conserve le long du faisceau :  $P = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2(r, z) \pi R^2(z) \rightarrow E_l = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2P}{\pi\epsilon_0 c}}$

et  $E_f = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{2P}{\pi\epsilon_0 c}} = \frac{\pi D}{2\lambda_0 f'} \sqrt{\frac{2P}{\pi\epsilon_0 c}}$  car  $\tan \alpha = \frac{D}{2f'} = \frac{\lambda_0}{\pi R_0} \rightarrow E_f = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Ce champ est de l'ordre de grandeur du champ ressenti par l'électron ( $E_c^n = \frac{E_c}{n^4}$ ), l'interaction est possible.

4) Le champ peut être considéré comme uniforme car le déplacement de l'électron (de l'ordre de  $a_0$ ) est **très inférieur** à la longueur d'onde  $\lambda_0$ . En d'autres termes,  $\Delta(\omega_0 t) > \omega_0 T_0 = 2\pi \gg \Delta(k_0 z) \sim 2\pi \frac{a_0}{\lambda_0}$

5)  $W_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 |x|}$  Ce qui est cohérent avec les figures II. a et II. d

6)  $\vec{F}_{Lo} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$  ;  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$  ; La force de Lorentz est conservative si  $\vec{E}$  dérive d'un gradient (la force magnétique ne travaille pas) :  $dW_{p,las} = e\vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow W_{p,las}(x, t) = xeE_f \cos(\omega_0 t)$   
 $\rightarrow W_{p,tot}(x, t) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 |x|} + xeE_f \cos(\omega_0 t)$

L'asymptote en  $\pm\infty$  a une pente négative donc  $E_f \cos \omega_0 t < 0 \rightarrow \vec{E}$  est vers **la gauche** ( $\vec{F}_{Lo}$  vers la droite)

**Il semblerait que les figures II. b et II. c représentent  $W_{p,tot}$  et non  $W_p$  ?**

7) L'ionisation est plus facile lorsque **la norme de  $\vec{E}$  est maximale**. Cela arrive deux fois par période ( $\cos \omega_0 t_i = \pm 1$ ). Etudions la fonction  $W_{p,tot}$  en fonction de  $x$ , pour  $x > 0$  (et donc  $\cos \omega_0 t < 0$ ) :

La dérivée  $\frac{\partial W_{p,tot}}{\partial x}$  s'annule en  $\tilde{x}_0 = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-4\pi\epsilon_0 E_f \cos(\omega_0 t)}}$  et le maximum est  $W_{p,tot}^{max} = -2e \sqrt{\frac{-eE_f \cos(\omega_0 t)}{4\pi\epsilon_0}}$

Aux instants privilégiés, ce maximum est au plus bas et vaut  $-W_0$  :  $E_{f,i} = \frac{\pi\epsilon_0 W_0^2}{e^3} = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

**L'ionisation est possible** d'après la réponse à la question 3.

8)  $m\ddot{x} = -eE_f \cos(\omega_0 t)$

$\rightarrow \dot{x} = \frac{eE_f}{m\omega_0} (\sin(\omega_0 t_i) - \sin(\omega_0 t)) = -\frac{eE_f}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \leftarrow$  Si  $t_i$  est un instant privilégié

$\rightarrow x = \frac{eE_f}{m\omega_0^2} (\omega_0(t - t_i) \sin(\omega_0 t_i) + \cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t_i)) = \frac{eE_f}{m\omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) \pm 1) \quad \downarrow$

A posteriori,  $x_0$  doit être négligeable devant  $x_{max} \sim \frac{2eE_f}{m\omega_0^2} \sim 3 \text{ nm}$

$$9) W_c = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_0^2} (\sin(\omega_0 t_i) - \sin(\omega_0 t))^2$$

$$\rightarrow \langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{2m\omega_0^2} \left( \sin^2(\omega_0 t_i) + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2 E_f^2}{4m\omega_0^2} \text{ Si } t_i \text{ est un instant privilégié}$$

$$h\nu_{max} = W_{c,max} + W_0 \rightarrow \nu_{max} = 5,0 \cdot 10^{16} \text{ Hz} \rightarrow \Delta T \sim \frac{1}{\nu_{max}} = 2,0 \cdot 10^{-17} \text{ s}$$

10) Le signal  $s_0(t)$  est **périodique**, il se décompose en une **somme de signaux sinusoïdaux** type  $S_0 \cos(\omega t)$

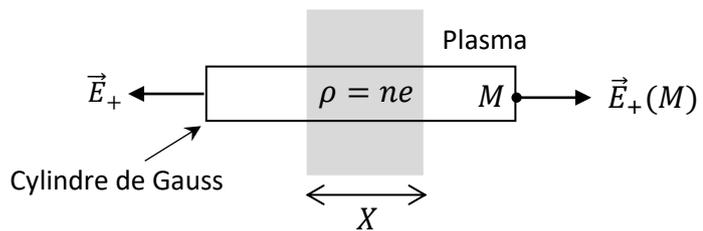
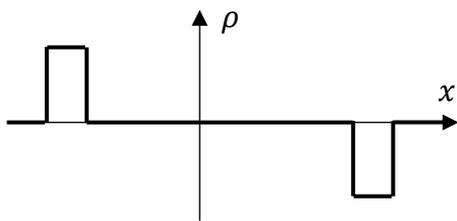
Les signaux reçus en  $x > 0$  à l'instant  $t$  sont ceux émis en  $t - \frac{x}{c}$  :  $s_+(x, t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$

et  $s_-(x, t) = -S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{T_0}{2} - \frac{x}{c}\right)\right) \rightarrow s(x, t) = -2S_0 \sin\left(\frac{\omega T_0}{4}\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{T_0}{4} - \frac{x}{c}\right)\right)$

L'amplitude est maximale si  $\frac{\omega T_0}{4} = (2p + 1)\frac{\pi}{2}$  avec  $p \in \mathbb{N}$  C'est-à-dire si  $\omega = (2p + 1)\omega_0$

La pulsation du fondamental est  $\omega_0$  et seules les harmoniques de rangs **impairs existent**.

11)  $\rho = ne$  si  $-L/2 < x < -L/2 + X(t)$ ,  $\rho = -ne$  si  $L/2 < x < L/2 + X(t)$ ,  $\rho = 0$  ailleurs



On s'intéresse au champ  $\vec{E}_+(M)$  créé par la tranche d'ions ( $\rho = ne$ ). La distribution est invariante par translation suivant  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z \rightarrow E_+(x)$ . Tous les plans contenant l'axe  $(M, \vec{e}_x)$  sont des plans de symétrie, on en déduit que  $\vec{E}_+ = E_+(x)\vec{e}_x$ . On choisit une surface de Gauss cylindrique de longueur supérieure à  $X$ , de section  $S$ , positionnée de façon symétrique par rapport à la tranche d'ions afin d'utiliser le plan de symétrie  $x = -\frac{L}{2} + \frac{X(t)}{2}$  :  $2SE_+ = \frac{neSX}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_+(M) = \frac{neX}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$  De la même façon,  $\vec{E}_-(M) = \frac{neX}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$   
 $\rightarrow \vec{E}(M) = \frac{neX}{\epsilon_0}\vec{e}_x$  On applique la deuxième loi de Newton à l'électron :  $\ddot{X} + \frac{ne^2}{m\epsilon_0}X = 0$

[Cette question est très proche de l'exercice I.6-7 du TD Electromagnétisme]

12) Les équations de structure :  $div \vec{B} = 0$   $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Les équations de liaison aux sources :  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$   $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$

On applique, en régime sinusoïdal, la deuxième loi de Newton à un électron (seule particule mobile).

Il ne subit que la force électrique :  $i\omega m \underline{v} = -e \underline{E} \rightarrow \underline{j} = \rho_m \underline{v} = -ne \underline{v} = \frac{ne^2}{i\omega m} \underline{E} \rightarrow \underline{\gamma} = \frac{ne^2}{i\omega m}$

$\text{rot } \text{rot } \underline{E} = -\underline{\Delta} \underline{E} \Leftrightarrow \underline{\Delta} \underline{E} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underline{0}$  Equation dans laquelle on injecte la solution envisagée :

$$-k^2 - i\omega \mu_0 \underline{\gamma} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \rightarrow \omega_p^2 < \omega^2 \Leftrightarrow n < \frac{m\epsilon_0 \omega^2}{e^2} = n_c$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, seul un vecteur d'onde  $\underline{k}$  imaginaire pur conviendrait.

L'onde **ne se propagerait pas, elle s'atténuerait** tout en étant **stationnaire** (évanescence).

$$13) x_c = -L \ln\left(\frac{n_{max}}{n_c}\right)$$

14) On note  $\alpha$ , l'angle entre le faisceau laser et l'axe  $x$  :  $k_y = k \sin \alpha = \frac{\omega}{c} n \sin \alpha$ .

D'après les lois de Descartes, soit  $\alpha$  se conserve (réflexion), soit  $n \sin \alpha$  se conserve (réfraction) :

$k_y = cste = \frac{\omega}{c} \sin \beta$  (à la limite dans le milieu incident vide). On réécrit la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_p^2(x) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \beta + k_x^2 \right) c^2 \rightarrow k_x \in \mathbb{R} \text{ tant que } \omega_p^2(x) < \omega^2 (1 - \sin^2 \beta) = \omega^2 \cos^2 \beta$$

On en déduit que  $n(x) < n_c \cos^2 \beta \rightarrow x_r = x_c + 2L \ln(\cos \beta)$  Résultat conforme au précédent.

$$15) t_0(x) = \frac{x+3L}{v} ; \phi(x, t) = \omega_p(x)[t - t_0(x)] = \omega_{max} e^{x/2L} \left( t - \frac{x+3L}{v} \right)$$

$$16) \vec{k}_p = -\omega_{max} e^{x/2L} \left[ \frac{1}{2L} \left( t - \frac{x+3L}{v} \right) - \frac{1}{v} \right] \vec{e}_x = -\frac{\omega_{max}}{2L} e^{x/2L} \left( t - \frac{x+5L}{v} \right) \vec{e}_x$$

Le rayonnement est possible si  $k_{p,x} = 0$ . C'est en effet le cas lorsque  $t = \frac{x+5L}{v} > t_0(x)$

Pour un déplacement opposé, on remplacerait  $v$  par  $-v$  et on prendrait l'origine des temps au passage

$$\text{en } x = 0 : t_0(x) = -\frac{x}{v} \rightarrow k_{p,x} = -\frac{\omega_{max}}{2L} e^{x/2L} \left( t + \frac{x+2L}{v} \right) = 0 \text{ en } t = \frac{-x-2L}{v} < t_0(x) \text{ Impossible !}$$

$$17) \text{ Le décalage vaut } \frac{y \sin \beta}{c} ; t_0(x, y) = \frac{x+3L}{v} + \frac{y \sin \beta}{c} \rightarrow \phi(x, y, t) = \omega_{max} e^{x/2L} \left( t - \frac{x+3L}{v} - \frac{y \sin \beta}{c} \right)$$

$$\rightarrow k_{p,x} = -\frac{\omega_{max}}{2L} e^{x/2L} \left( t - \frac{x+5L}{v} - \frac{y \sin \beta}{c} \right) = 0 \text{ si } y = -\frac{c}{v \sin \beta} x + \frac{c}{\sin \beta} \left( t - \frac{5L}{v} \right)$$

Il y a **cohérence** car les points de cette droite **émettent en phase**.

Le rayonnement laser de très haute fréquence émis par ce plasma est associé à des impulsions très brèves de durée  $10^{-18}$  s, ce qui laisse augurer d'une très grande gamme de fréquence dans le spectre.

18) A haute température, l'énergie cinétique des électrons est l'élément essentiel de l'énergie interne du plasma  $\rightarrow U(\theta_e) \rightarrow$  **Gaz parfait**.

On reconnaît une détente dans le vide type "Joule-Gay Lussac" à  $U(\theta_e) = cste \rightarrow \theta_e = cste$

$$19) \text{ Par conservation du nombre d'électrons : } n_{0,max} \delta = n_{L,max} \left( \int_{-\infty}^0 e^{x/L} dx + \delta + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-(x-\delta)/L} dx \right)$$

$$\Leftrightarrow n_{L,max} = n_{0,max} \frac{\delta}{\delta+2L} \rightarrow \omega_{L,max} = \omega_{0,max} \sqrt{\frac{\delta}{\delta+2L}} = 18,7 \omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{\delta+2L}}$$

$$20) \text{ On pose } p = \left[ \frac{\omega_{L,max}}{\omega_0} \right], \text{ alors } c_s = \frac{\delta(18,7^2 - p^2)}{2p^2 T} \sim 1,8 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ pour les quatre premières valeurs de } \delta$$

( $\delta = 100 \text{ nm}$  ne donne pas un résultat cohérent, la partie décimale de  $\frac{\omega_{L,max}}{\omega_0}$  doit être trop importante ?)

On en déduit  $\theta_e = 7,7 \cdot 10^6 \text{ K}$  ... ambiance chaude

$$21) \text{ Dans ce modèle, } \frac{3}{2} k_B \theta_e n_{0,max} \delta \text{ se conserve, c'est à dire } \theta_e \delta = cste \Leftrightarrow L^2 \delta = cste = L_0^2 \delta_0.$$

$$\text{Il en résulte } \omega_{L,max} = \omega_{0,max} \sqrt{\frac{\delta}{\delta+2L}} = \omega_{0,max} \sqrt{\frac{\delta}{\delta+2L_0 \sqrt{\delta_0/\delta}}} = \frac{\omega_{0,max}}{\sqrt{1+2L_0 \sqrt{\delta_0} \delta^{-3/2}}}$$

Alors que dans le premier modèle,  $\omega_{L,max} = \frac{\omega_{0,max}}{\sqrt{1+2L} \delta^{-1}}$  avec  $L = cste$  ... La différence est bien maigre.