Exercice 1. a) Montrer que si a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$ sont tels que $1/a + 1/b = 1$ alors pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$,

$$uv \leq \frac{u^a}{a} + \frac{v^b}{b}$$

b) Déduire du a) que si X et Y sont deux v.a. admettant un moment d'ordre k alors pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $X^i.Y^{k-i}$ admet une espérance et conclure que $(X + Y)$ admet un moment d'ordre k.

En déduire aussi que si on note $\mathscr{L}^k(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des v.a. admettant un moment d'ordre k, alors $\mathscr{L}^k(\Omega, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 2. Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2.

Démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2).\mathbb{P}(X > 0)}$$

Exercice 3 (Inégalité de Jensen en proba)**.** Soit X une v.a. réelle admettant une espérance et f sur une fonction concave sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$. On suppose aussi que $f(X)$ admet une espérance.

Montrer alors que $\mathbb{E}(f(X)) \leq f(\mathbb{E}(X))$.

Indication – Si x_0 est un réel dans I, expliquer qu'il existe une fonction affine g telle que $g(x_0) = f(x_0)$ et telle que $\forall\, x \in X(\Omega)$, $g(x) \geq f(x)$.

En écrivant $g(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ et en choisissant $x_0 = E(X)$, conclure, en appliquant les propriétés de l'espérance.

Exercice 4. Soit X une v.a. bornée, à valeurs dans $[-M, M]$.

a) Montrer que pour tout $0 < a < M$, on a :

$$\mathbb{E}(X^2) \leq (M^2 - a^2)\mathbb{P}(|X| \geq a) + a^2$$

b) En déduire que :

$$\frac{E(X^2) - a^2}{M^2 - a^2} \leq \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}$$

Exercice 5. On considère l'univers $\Omega = S_n$ de toutes les permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. Pour chaque σ dans S_n, on note $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ autrement dit le nombre moyen de points fixes d'une permutation $\sigma \in S_n$.

Indication – Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pourra considérer l'indicatrice de l'événement A_i : « i est un point fixe de la permutation tirée. »

Version plus mondaine : n couples mariés arrivent à un bal et chaque cavalier choisit une cavalière aléatoirement. Quel est le nombre moyen de couples mariés qui vont danser ensemble ?

b) Calculer aussi $\mathbb{V}(X)$.

c) Retour sur la loi (plus difficile) : à l'aide par exemple du principe d'inclusion-exclusion (ou formule de Poincaré, ou du crible, qui est un exercice en soi, donnant $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ en fonction des proba des différentes intersections des A_i), expliciter la loi de X (chaque $P(X = k)$ s'écrira comme une somme). Ce calcul cependant ne permet pas facilement d'en déduire l'espérance (et a fortiori la variance) de X.

d) Comportement asymptotique

Idée : si les v.a. $X_i = 1_{A_i}$ introduite dans l'indication du a) étaient indépendantes*, alors X suivrait une loi $\mathcal{B}(n, 1/n)$ et quand $n \to +\infty$, la loi de X convergerait avec une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. (résultat sur la loi limite de loi binomiale ici avec $n \times p_n = n \times 1/n = 1$.).*

Ici, il n'est pas vrai que les v.a. X_i sont indépendantes (cf. le calcul du b)), mais :

montrer qu'il est quand même vrai que la loi de X converge, quand $n \to +\infty$, vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

Exercice 6. On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Le nombre *moyen* de tirages donnant un 6 est $n/6$ (au sens de l'espérance). On demande comment choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de 6 entre 0 et $n/3$ soit supérieure à $0,9$ puis à $0,99$. Pour cela,

a) donner une condition suffisante sur n à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) En notant X_n le nombre de 6 obtenus après n tirages, donner une formule exacte pour $P(X_n \in [0, n/3])$ et déterminer à l'aide de Python la plus petite valeur de n donnant ce résultat.

Exercice 7. A l'aide de l'I.B.T. montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} 2^{4n}$.

Exercice 8. Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien. Dans tout l'exercice $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.

a) On suppose, dans cette question seulement, que $(v_1, \ldots, v_n)$ sont deux à deux orthogonaux. Calculer pour tout uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ la norme :

$$\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\|^2$$

b) Désormais on ne suppose plus que $(v_1, \ldots, v_n)$ sont orthogonaux. Montrer que si l'application :

$$\begin{array}{ccc} \{-1,1\}^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) & \mapsto & \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\|^2 \end{array}$$

est constante, alors $(v_1, \ldots, v_n)$ sont orthogonaux.

c) Soit $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ quelconque.
On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes, définies sur le même espace probabilisée $(\Omega, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telles que :

$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2.$$

On s'intéresse à la variable aléatoire :

$$U\,:\,\Omega \to \mathbb{R}^+,\ \omega \mapsto \|\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) v_i\|^2.$$

Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(U)$.

d) En déduire que si $v_1, \ldots, v_n$ ne sont pas orthogonaux alors il existe un uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\| > \sqrt{n}.$$

Exercice 9. Soient $(X_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi définie par $P(X_{i,j} = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_{i,j} = -1) = \dfrac{1}{2}$. On considère la variable aléatoire $D = \det(M)$ où M est la matrice aléatoire dont les entrées sont les $X_{i,j}$.

a) **Maths :** déterminer l'espérance et la variance de la v.a. D.

b) Expérimentation statistique avec Python (à l'aide de la documentation de Centrale) :
   i) écrire une fonction `test` qui prend en paramètre un entier `n` et qui renvoie la valeur d'une matrice `M` aléatoire comme définie ci-dessus de taille `n`.
   ii) Pour `N=10000` et `n=5` (par exemple), calculer la moyenne statistique des résultats de `N` test, qui doit s'approcher (on l'espère) de l'espérance de `D`.
   Comment obtenir `var(D)` à partir d'une moyenne statistique ?

c) Une calcul avec la formule de l'espérance mathématique :
   i) Ecrire une fonction `Univers` qui reçoit un entier `n` (petit !) en paramètre et retourne la liste de *toutes* les matrices de tailles $n \times n$ ayant comme entrées des `1` et des `-1`.
   ii) En déduire le calcul de l'espérance mathématique et de la variance avec Python . (Le nombre de calculs étant très grand, on se limitera à `n=4`).