Exercice 1 (Généralités sur les v.a.d.)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (X_n) une suite de v.a.d. de Ω dans un ensemble E.

a) **Temps d'« arrêt » :** On fixe $x \in E$ et on considère $T_x : \Omega \to \mathbb{N}, \omega \mapsto \min\{n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) = x\}$. Montrer que T_x est une v.a.d. qu'on notera simplement $T_x = \min\{n \in \mathbb{N}, ; X_n = x\}$.

b) **Une sorte de « Composition »** Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit X_N par $\forall\, \omega \in \Omega,\ X_N(\omega) := X_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que X_N est une v.a.d.

Exercice 2 (Loi du maximum de n v.a. de loi uniforme)**.** Un correcteur paresseux met « au hasard » une note entre 0 et 20 à chacune de ses n copies. On note X_n la v.a. qui donne la valeur de la note maximale. Déterminer la loi de X_n puis déterminer la limite de cette loi pour $n \to +\infty$ autrement dit pour chaque $k \in [\![0, 20]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.

indication (méthode pour les max./min) commencer par étudier $\mathbb{P}(X_n \leq k)$.

Exercice 3. Une urne contient initialement une boule blanche. On effectue un ou plusieurs lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

— si on obtient pile : on ajoute une boule noire et on lance à nouveau la pièce,

— si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.

a) Déterminer la loi de X.

b) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 4. Un joueur jette une pièce a priori non équilibrée (qui tombe sur pile avec une proba. p) jusqu'à ce qu'il obtienne « pile ». Si ceci se passe au k-ième lancer, il lance alors k fois un dé équilibré. Il gagne s'il obtient *exactement* une fois un 6. On demande la probabilité pour que le joueur gagne à ce jeu.

Exercice 5 (Loi binomiale négative : Obtention « naturelle » de cette loi)**.** La loi binomiale permet de décrire le nombre de succès qu'on peut obtenir lors d'une série de n expériences de Bernoulli indép. de même paramètre p. On peut considérer le problème inverse, c'est-à-dire essayer de décrire le nombre d'expériences qu'il faut faire pour arriver à obtenir k succès où k est donné.

Clairement si $k = 0$ ce nombre est 0 Si $k = 1$, on cherche en fait l'instant T_1 du premier succès, et on sait que ce temps T_1 suit une loi géométrique. On s'intéresse ici au cas $k \geq 1$.

On fixe un $k \geq 1$ on appelle T_k la v.a. qui donne le temps d'attente du k-ième succès.

Déterminer la loi de T_k.

Exercice 6. Soient X et $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ deux v.a. telles que $X \leq Y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) \neq 0$.

On suppose que la loi conditionnelle de X par rapport à $Y = n$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

a) Montrer que les v.a. $Y - X + 1$ et X ont même loi.

b) On suppose dans cette question seulement que X suit une loi géométrique de paramètre p.

i) Déduire de la formule $\mathbb{P}(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{n}$ une expression de $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = k)$ et de $\mathbb{P}(X = k + 1)$ pour tout k. En déduire la loi de Y.

ii) Montrer que les v.a. $Y - X + 1$ et X sont indépendantes.

Exercice 7. Soit X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe définie par $\forall\,(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k, Y = l) = e^{-2\lambda} \dfrac{\lambda^{k+l}}{k!l!}$.

Démontrer que X et Y suivent chacune une loi de Poisson de paramètre λ et sont indépendantes.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n personnes montent dans un ascenseur d'un immeuble de p étages et que chaque personne a autant de chance de descendre à chaque étage. On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 9. Soient m et n deux entiers non nuls tels que $m \leq n$.

a) Dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n, on tire sans remise m boules et on note X le plus petit numéro obtenu. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b) Même question pour un tirage avec remise (on note Y la v.a. correspondante).

c) Comparer les deux résultats pour m fixé et $n \to +\infty$.

Exercice 10. Un élément chimique émet des électrons pendant un temps T. Le nombre d'électrons émis pendant ce temps est une v.a. Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque électron émis a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira d'être efficace). Soit Z la v.a. égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant le temps T.

a) Déterminer la loi du couple (Y, Z).

b) Déterminer la loi de Z et son espérance.

c) Les v.a. Y et Z sont-elles indépendantes ?

d) On considère la v.a. X donnant le nombre d'électrons émis non efficaces. Déterminer la loi du couple (X, Z). Les v.a. X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère une v.a. X binomiale de paramètres n et p. Exprimer $E(\frac{1}{X+1})$ en fonction de n et p.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour un événement $A \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle, si la famille $(x\mathbf{P}(X = x \mid A))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, on appelle espérance conditionnelle de X sachant A :

$$\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x \mid A)$$

a) On suppose que $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer qu'alors $\mathbf{E}(X \mid A)$ est bien définie si $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

b) Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ un système quasi-complet d'événements. Montrer : $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \mathbf{E}(X \mid A_k)$.

c) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et p_1, p_2 dans $[0,1]$.
On considère deux v.a. X et Y telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p_1)$ et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$ est $\mathcal{B}(k, p_2)$. Déterminer $E(Y)$.