Banque CCINP : Ex. 30, 31, 32, 42, 55, 74, 75

Révisions de première année :

Exercice 1. Trouver toutes les fonctions $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant l'E.D. $xy' - 4y = 0$.

Exercice 2. a) Résoudre sur chaque intervalle $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ l' E.D. $x\ln(x)y' + y = x$.
b) Etudier les éventuelles solutions sur $]0,+\infty[$ de cette même E.D.

Exercice 3. Résoudre l'E.D. $y' = |y|$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec la C.I. $y(0) = 1$

Exercice 4 (Un calcul d'inf. de norme 1)**.** Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$. Pour $f \in E$, on note $I(f) = \displaystyle\int_0^1 |f - f'|$

a) Montrer que pour tout $f \in E$, $I(f) \geq 1/e$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de $f \in E$ tel que $I(f) = 1/e$.

N.B. 1 En fait, on peut montrer que $1/e$ est cependant l'inf. des $I(f)$ pour $f \in E$.
N.B. 2 Comparer cet exercice au calcul de $\inf\{f \in E,\ N_2(f - f')\}$... qui se traiterait plutôt avec Cauchy-Schwarz.

Exercice 5. Soit $\alpha > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) + \alpha f(x) = 0 \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

a) En posant $\varphi = f' + \alpha f$ exprimer f en fonction de φ via la M.V.C.
b) Ensuite montrer que le terme intégral tend vers zéro, à l'aide d'un théorème d'intégration des relations de comparaisons.
c) Généralisation : on suppose maintenant qu'on a les mêmes hypothèses mais que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) + \alpha f(x) = l \in \mathbb{R}$. Que conclure sur $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

Exercice 6. Résoudre $y'' - y = e^x + e^{-x}$.

Exercice 7. Soit $\omega > 0$ et (E) l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$.

a) Résoudre (E) comme vous l'avez appris en première année.

b) Retrouver *le même résultat* en utilisant la méthode de variation de constantes (c'est plus long !).
Retenir – *la M.V.C. n'est vraiment pas pratique ici !*

Exponentielle matricielle

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A).\exp(B)$, $\exp(B).\exp(A)$ et $\exp(A+B)$.

Exercice 9. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $R_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

a) Dans cette question on suppose que $t \neq 0\ [\pi]$. Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\exp(M) = R_t$.
Indication – On pourra considérer d'abord la trace des M candidats puis justifier que M et R_t commutent.
b) Que dire dans le cas où $t \equiv 0\ [\pi]$?

Systèmes différentiels à coefficients constants

Exercice 10. Résoudre le système $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 13 & -12 & -6 \\ 6 & -5 & -3 \\ 18 & -18 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Résoudre le système $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. a) Déterminer $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$

b) En déduire les solutions du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 3 \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 13. Résoudre : $\begin{cases} x'(t) + x(t) + y(t) = t^2, \\ y'(t) + y(t) + z(t) = t \\ z'(t) + z(t) = 1 \end{cases}$

Exercice 14 (On veut que *toutes* les solutions tendent vers zéro en $+\infty$: stabilité asymptotique)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Montrer que toutes les solutions de l'E.D. $X' = AX$ tendent vers 0 en $+\infty$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

Recherche de solutions particulières D.S.E. ou autre de l'équation homogène et comment trouver les autres...

Exercice 15 (Fonction de Bessel J_0)**.** a) Trouver les solutions D.S.E. de l'E.D. $xy'' + y' + y = 0$. A-t-on obtenu toutes les solutions sur de l'E.D. sur $]0, +\infty[$?

On note f celle qui vaut 1 en 0.

b) Montrer qu'il existe un $x_0 \in]0, 2]$ qui est le plus petit zéro de f dans cet intervalle autrement dit $f(x_0) = 0$ et $\forall\, x \in]0, x_0[,\ f(x) \neq 0$.

Exercice 16. On considère sur $]0, +\infty[$ l'E.D. d'inconnue $t \mapsto x(t)$

$$tx''(t) + tx'(t) - x(t) = 0 \quad (E)$$

a) Trouver les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (E).
b) A l'aide de la solution trouvée précédemment, trouver toutes les solutions de l'E.D. (E) sur $]0, +\infty[$.
c) (i) Déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ qui se prolongent en une fonction continue sur $[0, \infty[$.
(ii) Déterminer les solutions qui se prolongent en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Comportement qualitatifs des équations du second ordre à coeff. non constant

Exercice 17 (La M.V.C. permet de résoudre « formellement » et de lier les prop. de la solution à celle du second membre)**.** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\omega > 0$ et l'E.D. $y'' + \omega^2 y = f$. Existe-t-il une solution y de l'E.D. qui vérifie simultanément les conditions $y(0) = y(1)$ et $y'(0) = y'(1)$?

Exercice 18. Soit (E) : $y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$ avec a_1, a_0, b continue sur un intervalle I.

a) Théorème de séparation de Sturm : Montrer que si y est une solution de (E) qui n'est pas la fonction nulle et si $y(x_0) = 0$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel y ne s'annule pas à part en x_0.
b) Théorème d'entrelacement : Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée (E_H) alors , entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a exactement un zéro de y_2. *Indication* – Considérer le wronskien des solutions (y_1, y_2).

Exercice 19 (Un « potentiel »)**.** Soit E l'E.D.L $e^{-x^2}y''+y = 0$. En considérant $V(x) = e^{-x^2}(y')^2+y^2$, montrer que toute solution de (E) est bornée.

Exercice 20. Soit $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{-*})$, et soit (E) : $y''(t) + a(t)y(t) = 0$.

a) Montrer que pour tout solution $t \mapsto y(t)$ de (E), la fonction y^2 est *convexe*.
b) Montrer que la seule solution de (E) qui est bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.