Banque CCINP : Ex. 33, 52, 57, 58.

Continuité, caractère $\mathcal{C}^1$, de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ « concrètes »

Exercice 1. Soit $f\ :\ (x,y)\mapsto f(x,y) = \text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$.

a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ entier.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ entier.
c) La fonction f admet-elle une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$?

Exercice 2. Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\begin{cases}(x^2-y^2)\ln(x^2+y^2),\text{ si }(x,y)\neq(0,0),\\ 0 \text{ si }(x,y)=(0,0).\end{cases}$.

Montrer que les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (on dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$).

Exercice 3. Soit $f\ :\ (x,y)\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$. Montrer que :

a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$,
b) f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
d) donner une écriture sans $\sum$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y)\neq(0,0)$.

Calculs de Différentielles

Exercice 4 (Exemples traités en cours mais on insiste car tous cruciaux !)**.**

a) Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Expliciter $df(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.
b) Soit E un espace vectoriel euclidien, et $\|\ \|$ sa norme euclidienne. Montrer que cette application norme de $E\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}^+$ est différentiable et calculer sa différentielle de deux manières : **(M1)** en coordonnées. **(M2)** sans coordonnées, en reliant la norme au produit scalaire, et en utilisant la linéarité du p.s.
c) Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ et (en identifiant $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$), $f\ :\ x\mapsto(Ax|x)$. Calculer $df(x)$ et $\nabla f(x)$ en tout point $x\in\mathbb{R}^n$. Que dire dans le cas où A est une matrice symétrique.
d) Calculer le gradient de l'application $\det\ :\ M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ (pour le p.s can.) et en déduire la différentielle du déterminant.

Exercice 5. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$

a) Soit $f\ :\ E\to E,\ M\mapsto M^3$. Calculer $df(M).H$ pour tout $(M,H)\in E^2$.
b) Soit $k\in\ \mathbb{N}^*$ et $\varphi\ :\ M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ M\mapsto\text{Tr}(M^k)$. Calculer $d\varphi(M)$ pour tout $M\in M_n(\mathbb{R})$.

Utilisations, nombreuses, de la formule de dérivation le long d'une courbe

Exercice 6. 1) Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ telle que l'application $x\mapsto df(x)$ est constante. Que dire de f ?
Indication - on reliera $f(x)$ à $f(0)$ grâce à un segment.

2) Montrer le même résultat si $f\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^p)$ où U est un ouvert connexe par arc de $\mathbb{R}^n$.
Indication – il est plus facile de supposer que $x\mapsto df(x)$ est constante égale à 0. On pourra commencer par ce cas !
N.B. On admettra qu'un ouvert c.p.a. est en fait « connexe par arcs $\mathcal{C}^1$ ».

Exercice 7 (L'I.A.F. qui n'est bizarrement pas au programme)**.** Soit U un ouvert de E et $f\in\mathcal{C}^1(U,F)$. On suppose qu'il existe une boule fermée $B_f(a,r)\subset U$ et un réel positif M tel que :

$$\forall\, x\in B_f(a,r),\ |||df(x)|||\leq M.$$

Montrer que $f_{|B_f(a,r)}$ est M-lipschitzienne.