Banque CCINP Ex. 58, 57, 56, 52,41, 33

Recherche d'extrema sur un ouvert (extrema « libres »)

Exercice 8. Soit $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

a) Etudier les extrema locaux de f dans U en considérant $g(x,y) = \ln(f(x,y))$ ce qui simplifie les calculs.

b) Etudier $f(x,y)$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$ et en déduire les extrema globaux de f.

Exercice 9. Étudier les extrema locaux de :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto e^{x\sin y}.$$

Exercice 10. Étudier les extrema locaux de

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy^2 + \ln\left(4+y^2\right).$$

Recherche d'extrema sur un sous-ensemble X de E (extrema « liés »)

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (y-x)^3 + 6xy$ et $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq y \leq 1\right\}$

a) Montrer que $f_{|E}$ admet un maximum et un mininum.

b) Etudier les points critiques de $f_{|\mathring{E}}$.

c) Déterminer si $f_{|\mathring{E}}$ admet des extrema locaux.

d) Etudier $f_{|\partial E}$ où $\partial E = E \setminus \mathring{E}$ désigne la frontière de E.

e) Conclure sur la valeur du max. et du min de $f_{|E}$ en précisant où ils sont atteints.

Propriétés des fonctions convexes

Exercice 12 (Cas d'une fonction strictement convexe continue coercive)**.** Soit E un e.v.n. de dim. finie et C un sous-ensemble convexe de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement convexe* sur C ssi pour tout $(a,b) \in C^2$ avec $a \neq b$ et pour tout $t \in]0,1[$, $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$. On suppose au a) et b) que f est stmt convexe sur C.

a) Montrer que si f admet minimum dans C alors celui-ci est atteint en un unique point.

b) On suppose que C est un convexe fermé et que $f : C \to \mathbb{R}$ est continue et coercive sur C ce qui signifie que si C est non borné $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un minimum atteint en un unique point dans C.

c) Exemple concret : on identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c$ avec A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
Montrer que f admet un minimum dans $\mathbb{R}^n$, atteint en un unique point $\overline{x}$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

a) Pour tout $a \in U$ et tout $v \in E$, on note $I_{a,b} = \{t \in \mathbb{R}, a + tv \in U\}$ et $\varphi_{a,v} : I_{a,v} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a+tv)$.

Montrer que f est convexe sur U ssi pour tout $(a,v) \in U \times E$, $\varphi_{a,v}$ est convexe sur $I_{a,v}$.

b) Montrer que f est convexe sur U ssi $\forall\, x \in U$, $H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Sous-espaces tangents

Exercice 14.

On note $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\}$. On note $\mathcal{H} = \{A \in M_n(\mathbb{R})\ \ \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

a) A l'aide d'un théorème du cours, montrer que $T_{I_n}(SL_n(\mathbb{R})) = \mathcal{H}$.

b) Dans le cours, on n'a démontré qu'une de deux inclusions pour le théorème utilisé au a). Montrer ici les deux inclusions, et pour l'une des deux utiliser pour chaque $A \in \mathcal{H}$ la courbe $c : t \mapsto \exp(tA)$.

Equations aux dérivées partielles

Exercice 15. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$. On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x,y) = (x^2 - 2xy - y^2, y).$$

a) Déterminer $\Omega' = \varphi(\Omega)$.

b) Vérifier que Ω et Ω' sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $\varphi_{|\Omega} : \Omega \to \Omega'$ est une bijection $\mathcal{C}^1$. On admet pour la suite que sa réciproque est aussi $\mathcal{C}^1$.

d) On veut déterminer l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles (E.D.P.) E suivant :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega,\ (x+y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad (E).$$

Trouver l'E.D.P. (E') vérifiée par la fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ sur Ω'.

e) Peut-on conclure de la question d) que les solutions g de l'E.D.P. (E') du d) sont les fonctions de la forme $g : (u,v) \in \Omega \mapsto h(u)$?

f) Comment caractériser plutôt les fonctions g solutions de (E') et donc les fonctions f solutions de (E) ?

Exercice 16. Résoudre les E.D.P. suivantes d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$, via les changement de variables indiqués :

a) $x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2x \cdot y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\left(u = x, v = \frac{y}{x}\right)$

b) $x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en posant $\left(u = \frac{y}{x}, v = xy\right)$

Exercice 17 (Potentiels centraux $F(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$ harmoniques)**.** Déterminer les $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par $F(x_1, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$, on ait $\Delta F = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n \partial^2 F / \partial x_i^2 = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.