Devoir surveillé 6 : solution

Exercice : caractérisation des fonctions homogènes de degré k

a) Suivant l'indication, on calcule, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-k} f(tx)\right) = -kt^{-k-1} f(tx) + t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(f(tx)\right) \tag{1}$$

Or par la formule sur la dérivée d'une composée, à x fixé, on sait que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(tx)\right) = df(tx).(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).x_i \tag{2}$$

L'hypothèse « f est homogène de degré k » dit que le membre de gauche de (1) est nul, et avec (2) on obtient :

$$0 = -kt^{-k-1} f(tx) + t^{-k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).x_i\right) \tag{3}$$

En évaluant (3) en $t = 1$, on obtient exactement l'identité d'Euler (E2) de l'énoncé.

b) On suppose donc que (E2) est vraie.

Suivant l'indication, on applique l'identité (E2), en remplaçant x par tx sachant que bien sûr les x_i sont aussi remplacés par tx_i ce qui donne :

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \sum_{i=1}^{n} tx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = kf(tx)$$

En multipliant cette égalité par t^{-k-1} on obtient exactement l'égalité (3) du a). Or par le a), (3) est équivalente à la nullité de la fonction $t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-k} f(tx)\right)$

Donc pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $t \mapsto t^{-k} f(tx)$ est constante, or sa valeur pour $t = 1$ est $f(x)$ donc on a bien : $f(tx) = t^k f(x)$.

c) La relation (E_2) s'écrit $G(n_1, \ldots, n_s) = \sum_{i=1}^{s} n_i \frac{\partial G}{\partial n_i}$ où les $\frac{\partial G}{\partial n_i}$ sont notés μ_i et appelés les *potentiels chimiques.*

Problème : ε-isométries et probabilités

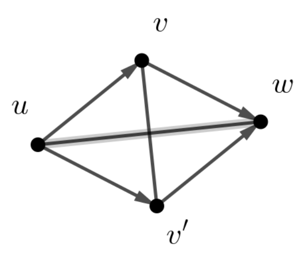
Q 1) On a $\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle$ donc $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$ et de même $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle$ Par somme, on a l'identité demandée, dite du parallélogramme :

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$$

Géométriquement, dans le parallélogramme $0, a, a + b, b$*, la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales.*

Q 2) On suppose que u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u - v\| = \|u - v'\|$.

Géométriquement, en voyant cette fois u, v, v' comme des points, les vecteurs $v - u$ et $v' - u$ sont portés par deux côtés adjacents d'un losange comme dans le dessin ci-dessous.



Pour compléter ce losange, le point w manquant est tel que $w - v = v' - u$ autrement dit de diagonale : $w - u = v + v' - 2u = 2(\dfrac{v + v'}{2} - u)$.
Alors l'égalité du parallélogramme pour ce losange u, v, w, v' dit que ;

$$2||u - v||^2 + 2||u - v'||^2 = ||v - v'||^2 + ||2(u - \frac{v + v'}{2})||^2$$

Dans le premier membre les deux termes sont égaux et comme dans le second $||v - v'|| > 0$, on en déduit que :

$$4||u - v||^2 > 4||u - \frac{v + v'}{2}||^2$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Q 3) Soit (w_n) comme dans l'indication, qui existe, par caractérisation de l'inf.
La suite $(||w_n - u||)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est en particulier bornée, et par I.T,

$$||w_n|| \leq ||w_n - u|| + ||u||$$

donc la suite (w_n) est aussi bornée. Comme E est de dim. finie, elle admet une suite extraite convergente $(w_{\varphi(n)})$, on note v sa limite
Mais alors $||w_{\varphi(n)} - u|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$ comme suite extraite d'une part, et $||w_{\varphi(n)} - u|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ||v - u||$ d'autre part.
Donc $||v - u|| = d$
Enfin, comme F est fermé, on sait que $v \in F$. Ainsi le vecteur v convient.

Q 4) L'existence de v est donné par la Q3 appliqué à C fermé.
Par l'absurde s'il existait $v \neq v'$ dans C tels que $\forall w \in \mathrm{C}, \|u - v\| \leqslant \|u - w\|$ et $\forall w \in \mathrm{C}, \|u - v'\| \leqslant \|u - w\|$ On aurait alors $\|u - v\| = \|u - v'\|$, et on pourrait appliquer Q2, ainsi $\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\| < \|u - v\|$ or $\frac{v+v'}{2} \in \mathrm{C}$ car C est convexe ceci est en contradiction avec $\forall w \in \mathrm{C}, \|u - v\| \leqslant \|u - w\|$ On a établi qu'il existe un unique v dans C tel que $\forall w \in \mathrm{C}, \|u - v\| \leqslant \|u - w\|$

Q 5) Visiblement, on suppose que pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie au moins sur $\mathbb{R}^+$et s'annule en 0 . Soit deux réels positifs a et b. Si a ou b est nul alors $ab = 0 \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$. Sinon, on a $\frac{1}{p} \in [0, 1]$ et par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{p} \ln (a^p) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln (b^q) \leqslant \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b^q\right)$$

d'où $\ln(a \times b) \leqslant \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$ Comme exp est croissante, on peut conclure que dans tous les cas : $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$

Q 6) On remarque que comme l'univers est fini, les variables aléatoires admettent des moments à tout ordre.
Suivant l'énoncé, on considère d'abord le :
• Premier cas : On suppose que $\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right) = \mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right) = 1$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|\mathrm{X}(\omega)\mathrm{Y}(\omega)| \leqslant \frac{|\mathrm{X}(\omega)|^p}{p} + \frac{|\mathrm{Y}(\omega)|^q}{q}$ d'après la question précédente donc

$$|\mathrm{XY}| \leqslant \frac{1}{p}|\mathrm{X}|^p + \frac{1}{q}|\mathrm{Y}|^q$$

d'où

$$\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|) \leqslant \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)$$

par croissance et linéarité de l'espérance donc avec l'hypothèse de ce premier cas :

$$\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)$$

• Deuxième cas : On suppose que $\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)>0$ et $\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)>0$
On note $\lambda=\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right), \mathrm{X}'=\frac{1}{\lambda^{1/p}}\mathrm{X}, \mu=\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^p\right)$ et $\mathrm{Y}'=\frac{1}{\mu^{1/q}}\mathrm{Y}$ Ainsi on a $\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}'|^p\right)=\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}'|^q\right)=1$ et on peut appliquer le premier cas à X' et Y' donc

$$\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}'\mathrm{Y}'|\right)\leqslant\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}'|^p\right)\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}'|^q\right)=1 \text{ et ainsi } \mathbb{E}\left(\left|\frac{\mathrm{XY}}{\lambda^{1/p}\mu^{1/q}}\right|\right)\leqslant 1$$

ce qui donne $\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|)\leqslant\lambda^{1/p}\mu^{1/q}=\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}$
• Troisième cas : On suppose que $\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)=0$ ou $\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)=0$. Sans perte de généralité, traitons le cas $\mathbb{E}\left(|\mathbf{X}|^p\right)=0$. Alors $\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}|x|^p\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)=0$ selon la formule du transfert Comme il s'agit d'une somme finie de réels positifs, on a $\forall x\in\mathrm{X}(\Omega)\setminus\{0\}, \mathbb{P}(\mathrm{X}=x)=0$ donc X est nulle presque sûrement donc il en est de même pour XY et aussi pour $|\mathrm{XY}|$ d'où $\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|)=0=\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}$ en particulier, on a l'inégalité demandée.
Conclusion : Dans tous les cas, on a $\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|)\leqslant\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}$

Q 7) Par définition

$$\mathbb{E}(\mathrm{X})=\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}x\cdot\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$$

Or selon la formule des probabilités totales avec $(\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a

$$\forall x\in\mathrm{X}(\Omega), \mathbb{P}(\mathrm{X}=x)=\sum_{i=1}^m\mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{X}=x)\cdot\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_i\right)$$

donc

$$\mathbb{E}(\mathrm{X})=\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}\sum_{i=1}^m x\cdot\mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{X}=x)\cdot\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_i\right)=\sum_{i=1}^m\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_i\right)\cdot\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}x\cdot\mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{X}=x)$$

(sommes finies) ce qui permet de conclure : $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^m\mathbb{P}\left(\mathrm{A}_i\right)\cdot\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\mid\mathrm{A}_i\right)$

Q 8) a) Il s'agit d'une fonction en escaliers : avec les notations de l'énoncé, X^2 étant à valeurs dans $\{y_1,\ldots,y_n\}$ rangés dans l'ordre strictement croissants, $t\mapsto P\left(X^2\geqslant t\right)$ est bien définie, constante de valeur $P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)=P(X^2>y_i)$ sur tous les intervalles $]\ y_i,y_{i+1}\ [$ pour $i\in[\![1,n-1]\!]$ ainsi que sur $]0,\ y_1\ [$ (où elle vaut 1) et $]\ y_n,+\infty\ [$ (où elle est nulle), donc en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, donc continue par morceaux
b) Elle est par ailleurs nulle sur ce dernier intervalle, de sorte que

$$\int_0^{+\infty}P\left(X^2\geqslant t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{y_n}P\left(X^2\geqslant t\right)\mathrm{d}t$$

puis par la définition même de l'intégrale d'une fonction en escaliers :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}P\left(X^2\geqslant t\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{y_1}P\left(X^2\geqslant t\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}P\left(X^2\geqslant t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{y_1}1\ \mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= y_1+\sum_{i=1}^{n-1}P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)(y_{i+1}-y_i)\,.\end{aligned}$$

c) On en déduit par décalage d'indice

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}P\left(X^2\geqslant t\right)\mathrm{d}t &= y_1+\sum_{i=1}^{n-1}P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)y_{i+1}-\sum_{i=1}^{n-1}P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)y_i\\ &= y_1+\sum_{i=2}^{n}P\left(X^2\geqslant y_i\right)y_i-\sum_{i=1}^{n-1}P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)y_i\\ &= \sum_{i=2}^{n-1}\left(P\left(X^2\geqslant y_i\right)-P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\right)y_i+P\left(X^2\geqslant y_n\right)y_n+\left(1-P\left(X^2\geqslant y_2\right)\right)y_1\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, $\left\{X^2 \geqslant y_{i+1}\right\} \subset \left\{X^2 \geqslant y_i\right\}$ donc

$$P\left(X^2 \geqslant y_i\right) - P\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) = P\left(\left\{X^2 \geqslant y_i\right\} \smallsetminus \left\{X^2 \geqslant y_{i+1}\right\}\right) = P\left(X^2 = y_i\right).$$

En outre, $1 - P\left(X^2 \geqslant y_2\right) = P\left(X^2 < y_2\right) = P\left(X^2 = y_1\right)$ et $P\left(X^2 \geqslant y_n\right) = P\left(X^2 = y_n\right)$. Il vient enfin

$$\int_0^{+\infty} P\left(X^2 \geqslant t\right) \mathrm{d}t = \sum_{i=2}^{n-1} P\left(X^2 = y_i\right) y_i + P\left(X^2 = y_n\right) y_n + P\left(X^2 = y_1\right) y_1 = \sum_{i=1}^{n} P\left(X^2 = y_i\right) y_i = \mathbb{E}\left(X^2\right)$$

d) Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left\{X^2 \geqslant t\right\} = \{X \geqslant \sqrt{t}\}$ par stricte croissance de la racine carrée, et avec le changement de variable usuel $t = u^2$

$$\int_0^{+\infty} P\left(X^2 \geqslant t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(X \geqslant \sqrt{t}) \mathrm{d}t = 2 \int_0^{+\infty} u P(X \geqslant u) \mathrm{d}u$$

ce qu'on voulait, le théorème de changement de variable assurant la convergence de cette dernière intégrale. Remarque : on a utilisé le théorème de changement de variable pour une intégrale de fonction continue par morceaux, ce que le programme ne permet pas a priori. Un découpage de l'intégrale selon une subdivision subordonnée à une telle fonction continue par morceaux montre que ce résultat est valide sans réelle restriction.

Q 9) Avec la Q8 et l'hyp. de majoration par une guassienne du début de cette partie, on a :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 2 \int_0^{+\infty} t P(X \geqslant t) \mathrm{d}t \leqslant 2a \int_0^{+\infty} t \mathrm{e}^{-bt^2} \, \mathrm{d}t = 2a \left[-\frac{\mathrm{e}^{-bt^2}}{2b}\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}$$

le calcul précédent prouvant la convergence de l'intégrale.

Q 10) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire

$$|X + \delta| \leqslant |X| + |\delta|$$

d'où $\{|X + \delta| \geqslant t\} \subset \{|X| + |\delta| \geqslant t\} = \{|X| \geqslant t - |\delta|\}$ et donc

$$P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant P(|X| \geqslant t - |\delta|)$$

comme voulu.

Q 11) Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$a - \frac{1}{2} b t^2 + b(t - |\delta|)^2 = \frac{1}{2} b t^2 - 2bt|\delta| + a + b|\delta|^2$$

est un trinôme du second degré en t, de discriminant

$$4(b^2\delta^2 - \frac{1}{2} b \left(a + b|\delta|^2\right)) = 2\left(b^2|\delta|^2 - ab\right) \leqslant 0$$

puisque $|\delta| \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Ce polynôme ne change donc pas de signe, il est donc positif sur $\mathbb{R}$, ce qu'on voulait.

Q 12) On a par le caractère sous-gaussien de X, applicable lorsque $t - |\delta| \geqslant 0$, et avec les deux questions précédentes et la croissance de l'exponentielle

$$P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant P(|X| \geqslant t - |\delta|) \leqslant a \mathrm{e}^{-b(t-|\delta|)^2} \leqslant a \mathrm{e}^{a - \frac{1}{2} b t^2} = a \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} b t^2}$$

comme voulu.

Preuve du N.B. Si $t \in [0, |\delta|[$, on a toujours $P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant P(|X| \geqslant t - |\delta|)$ avec $t - |\delta| < 0$ si bien que

$$P(|X| \geqslant t - |\delta|) = P(|X| \geqslant 0) \leqslant a$$

par le caractère sous-gaussien. Or, $|\delta| \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow a - b\delta^2 \geqslant 0$ et donc

$$a - b\frac{t^2}{2} \geqslant a - b\frac{\delta^2}{2} \geqslant a - b\delta^2 \geqslant 0$$

d'où $\exp\left(a - b\frac{t^2}{2}\right) \geqslant 1$ et enfin

$$P(|X| \geqslant t - |\delta|) \leqslant a \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} b t^2}.$$

Q 13) Si C ne rencontre pas $X(\Omega), P(X \in C) = 0$ et l'inégalité est triviale : $0 \leq 1$.

Q 14) On note $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ la décomposition de u sur $(e_1, \ldots, e_n)$. Comme $u \in X(\Omega)$, on a nécessairement $u_i \in \{-1, 1\}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par unicité de la décomposition sur une base. Il vient

$$\frac{1}{4}\|X - u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}.$$

et $v_i = \frac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ car ou bien $\varepsilon_i = u_i = \pm 1$ ou bien les $|u_i - \varepsilon_i| = 2$. Ainsi la variable aléatoire v_i est une variable de Bernoulli, et $\{v_i = 1\} = \{u_i = \varepsilon_i\}$ donc $P(v_i = 1) = \frac{1}{2}$. Finalement, $\frac{1}{4}\|X - u\|^2$ est une somme de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $\frac{1}{2}$, donc suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Q 15) Par la formule de transfert appliqué à la v.a. $Z = \frac{1}{4}\|X - u\|^2$ suivant $\mathcal{B}(n, 1/2)$ et à la fonction $f : z \mapsto \exp(z/2)$, on sait que :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}\|X - u\|^2\right)\right) = \mathbb{E}(f(Z)) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) e^{k/2}$$

et donc par la formule du binôme :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}\|X - u\|^2\right)\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^n$$

et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} < 3$ (largement...) on a bien

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}\|X - u\|^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^n} 4^n = 2^n.$$

Q 16) Comme $u \in C$, par définition même de la distance à un sous-espace :

$$\mathrm{d}(X, C) \leqslant \|X - u\|$$

Par ailleurs, $X(\Omega)$ ne rencontrant C qu'au point u, on a par indépendance

$$P(X \in C) = P(X = u) = P\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\varepsilon_i = u_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2^n}$$

de sorte que

$$P(X \in C) E\left(\exp\left(\frac{1}{8}\ \mathrm{d}(X, C)^2\right)\right) \leqslant P(X \in C) E\left(\exp\left(\frac{1}{8}\|X - u\|^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^n} 2^n = 1$$

comme voulu.

Q 17) Si $n = 1, X(\Omega)$ ne contient que deux vecteurs en tout, ε_1 et $-\varepsilon_1$, et notre hypothèse revient donc à supposer que ces deux vecteurs sont dans C. On a alors $P(X \in C) = 1,\ \mathrm{d}(X, C) = 0$, et l'inégalité II. 1 est donc triviale.

Q 18) $\Leftarrow$: On suppose que : $x' + te_n \in \mathrm{C}$. On a donc $x' + te_n \in \mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t$ car $x' \in \mathrm{E}'$.
Comme π est une projection et que $x' \in \mathrm{E}' = \operatorname{Im} \pi$, on a $\pi(x') = x'$ et que $\operatorname{Ker}(\pi) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})^{\perp} = \operatorname{Vect}(e_n)$, on a $\pi(e_n) = 0$
Par linéarité $\pi(x' + te_n) = x'$ d'où $x' \in \pi(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t) = \mathrm{C}_t$
$\Rightarrow$: On suppose que : $x' \in \mathrm{C}_t = \pi(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t)$.
Ceci nous fournit $y \in \mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t$ tel que $x' = \pi(y$ On écrit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où les $y_i \in \mathbb{R}$ On a donc $x' = \pi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$ et comme $y \in \mathrm{H}_t$, on a $y - te_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + (y_n - t) e_n \in \mathrm{E}'$ donc $(y_n - t) e_n \in \mathrm{E}'$ puis $y_n = t$ et ainsi $x' + te_n = y \in \mathrm{C}$
Conclusion : on a bien : $x' \in \mathrm{C}_t \Longleftrightarrow x' + te_n \in \mathrm{C}$

Q 19) Soit $t \in \{-1, 1\}$. $C_t \subset E'$ par définition même.

- Par hypothèse sur C, il contient au moins deux points, l'un de dernière coordonnée 1 et l'autre de dernière coordonnée -1 , autrement dit $C \cap H_t \neq \varnothing$ et donc $C_t = \pi(C \cap H_t) \neq \varnothing$.

- Par la Q18, $C_t = \tau^{-1}(C)$ où $\tau : x \mapsto x + te_n$ est continue de E' dans E par continuité des opérations algébriques. C_t est donc fermé comme image réciproque de fermé par une application continue.
- Pour tout $(x', y') \in C_t^2$, et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $(x' + te_n, y' + te_n) \in C^2$ donc

$$\lambda(x' + te_n) + (1-\lambda)(y' + te_n) = \lambda x' + (1-\lambda)y' + te_n \in C$$

par convexité de C, d'où $\lambda x' + (1-\lambda)y' \in C_t$, et C_t est convexe.
N.B. On peut aussi dire que C_t est convexe comme image d'un convexe par une application linéaire mais il faut justifier cette prop.

Q 20)

$$\begin{aligned}\{X \in C\} = \{X \in C; \varepsilon_n = 1\} \cup \{X \in C; \varepsilon_n = -1\} &= \{X' + e_n \in C; \varepsilon_n = 1\} \cup \{X' - e_n \in C; \varepsilon_n = -1\} \\ &= \{X' \in C_1; \varepsilon_n = 1\} \cup \{X' \in C_{-1}; \varepsilon_n = -1\}\end{aligned}$$

Cette réunion est évidemment disjointe, et $X' = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ est une fonction de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ donc indépendante de ε_n par le lemme des coalitions. Il vient comme voulu

$$\begin{aligned}P(X \in C) = P(X' \in C_1; \varepsilon_n = 1) + P(X' \in C_1; \varepsilon_n = -1) &= P(X' \in C_1) P(\varepsilon_n = 1) + P(X' \in C_1) P(\varepsilon_n = -1) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(X' \in C_1) + P(X' \in C_{-1})\right)\end{aligned}$$

Q 21) On a $\{\mathrm{d}(X,C) \geqslant t\} = \left\{\exp\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{d}(X,C)^2\right) \geqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{8}}\right\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ par stricte croissance de toutes les opérations effectuées, puis d'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable positive $\exp\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{d}(X,C)^2\right)$

$$\begin{aligned}P(\,\mathrm{d}(X,C) \geqslant t) = P\left(\exp\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{d}(X,C)^2\right) \geqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{8}}\right) &\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\mathbb{E}\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{d}(X,C)^2\right) \quad \text{Markov} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}}{P(X \in C)} \quad \text{par l'inégalité (II.1)}\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité de Talagrand en multipliant tout par $P(X \in C)$.

Q 22) g est continue par continuité de la norme et du produit matriciel, de sorte que $C = g^{-1}(]-\infty, r])$ est fermé comme image réciproque de fermé par une application continue. En outre, pour tout $(M, M') \in C^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a par inégalité triangulaire

$$g(\lambda M + (1-\lambda)M') = \|(\lambda M + (1-\lambda)M')\,u\| \leqslant \lambda g(M) + (1-\lambda) g(M') \leqslant \lambda r + (1-\lambda) r = r$$

de sorte que $\lambda M + (1-\lambda)M' \in C$ et C est convexe.

Q 23) Le piège de cette question, est que $\|M\|_F$ n'est pas la norme subordonnée aux normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ mais la norme euclidienne canonique sur $M_{k,d}(\mathbb{R})$. (Cela donnera donc une relation entre ces deux normes : $|||M||| \leq |||M||_F$).
Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant d}} \in \mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, alors par sommation de k inégalités de Cauchy Schwarz et en exploitant $\|u\| = 1$

$$\|Mu\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{\ell=1}^{d} m_{i,\ell} u_\ell\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{\ell=1}^{d} m_{i,\ell}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^{d} u_\ell^2\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{d} m_{i,\ell}^2 = \|M\|_F^2$$

d'où le résultat par croissance de la racine carrée.

Q 24) Soit $M \in \mathscr{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{d}(M,C) < t$, alors il existe $M' \in C$ tel que $\|M - M'\|_F < t$ d'où

$$g(M) = \|Mu\| = \|(M - M' + M')\,u\| \leqslant \|(M - M')\,u\| + \|M'u\| \leqslant \|M - M'\|_F + g(M') < t + r$$

comme voulu.

Q 25) On peut appliquer le théorème de Talagrand Q21 avec l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ de dimension kd muni de la base canonique orthonormée $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant jkd\\ 1\leqslant j\leqslant d}}$, la variable $\mathbf{X} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant d}} \varepsilon_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$ où les $\varepsilon_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes suivant une loi de Rademacher et C convexe fermé non vide de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \mathbb{P}(d(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Or $(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) = (g(\mathrm{X}) \leqslant r)$ par définition de C et $(g(\mathrm{X}) \geqslant r+t) \subset (d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t)$ par contraposée de Q24. On en déduit que $\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant r) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant r+t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$

Q 26) Comme suggéré, on considère $G : t \mapsto P(g(X) \leqslant t)$. L'ensemble $X(\Omega)$ est fini, donc $g(X(\Omega))$ aussi, et en notant r le cardinal de cet ensemble, on peut l'énumérer sous la forme $g(X(\Omega)) = \{y_1, \ldots, y_r\}$ en supposant $y_1 < \ldots < y_r$. G est croissante puisque $\{g(X) \leqslant t\} \subset \{g(X) \leqslant s\}$ si $t \leqslant s$ et par croissance de P. De plus, G est nulle sur $]-\infty, y_1[$, égale à 1 sur $[y_r, +\infty[$, et plus généralement constante égale à $P(g(X) \leqslant y_i)$ sur chaque intervalle $[y_i, y_{i+1}[$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$. On peut alors poser $j = \min\left\{i \in [\![1,r]\!], G(y_i) \geqslant \frac{1}{2}\right\}$; cet ensemble étant non vide puisqu'il contient n.

- On a déjà $P(g(X) \leqslant y_j) = G(y_j) \geqslant \frac{1}{2}$ par définition de j.
- On a de plus

$$P(g(X) \geqslant y_j) = 1 - P(g(X) < y_j) = 1 - P(g(X) \leqslant y_{j-1}) = 1 - G(y_{j-1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

toujours par définition de j puisque $G(y_{j-1}) < \frac{1}{2}$. $m = y_j$ est donc une médiane pour $g(X)$.

Q 27) Soit $t > 0$. En appliquant Q25 à $r = m$ puis $r = m - t$, on a :

$$\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m+t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \text{ et } \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m-t) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Puis par la définition de la médiane, dont l'existence est donnée par la question précédente :

$$\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m+t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \Rightarrow \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m+t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

et de même :

$$\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m-t) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Par somme

$$\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m+t) + \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m-t) \leqslant 4\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Comme $(|g(x) - m| \geqslant t) = (g(\mathrm{X}) \geqslant m+t) \cup (g(\mathrm{X}) \leqslant m-t)$ (union disjointe), on conclut que :

$$\mathbb{P}(|g(x) - m| \geqslant t) \leqslant 4\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

où m est une médiane de $g(\mathrm{X})$

Q 28) La variable aléatoire réelle $g(\mathrm{X}) - m$ vérifie les hypothèse du I.D, (queue sous-gaussienne) en prenant $a = 4$ et $b = 1/8$ À l'aide de Q9., on déduit que $\mathbb{E}\left((g(\mathrm{X}) - m)^2\right) \leqslant 32$.

Q 29) On a

$$g(X)^2 = \|Xu\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{\ell=1}^{d} \varepsilon_{i,\ell} u_\ell\right)^2$$

puis par linéarité de l'espérance

$$E\left(g(X)^2\right)=\sum_{i=1}^{k}E\left(\left(\sum_{\ell=1}^{d}\varepsilon_{i,\ell}u_\ell\right)^2\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{m=1}^{d}u_\ell u_m E\left(\varepsilon_{i,\ell}\varepsilon_{i,m}\right).$$

Pour $(i,\ell,m)\in[\![1,k]\!]\times[\![1,d]\!]^2$, si $\ell\neq m$, alors par indépendance

$$E\left(\varepsilon_{i,\ell}\varepsilon_{i,m}\right)=E\left(\varepsilon_{i,\ell}\right)E\left(\varepsilon_{i,m}\right)=0$$

tandis que si $\ell=m, E\left(\varepsilon_{i,\ell}\varepsilon_{i,m}\right)=E\left(\varepsilon_{i,\ell}^2\right)=1$. Il reste bien compte tenu de $\|u\|=1$

$$E\left(g(X)^2\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{d}u_\ell^2=\sum_{i=1}^{k}1=k.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance, il vient directement

$$E(g(X))=E(g(X)\times 1)\leqslant\sqrt{E\left(g(X)^2\right)E\left(1^2\right)}=\sqrt{k}.$$

Q 30) Par linéarité de l'espérance et espérance de constantes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((g(\mathrm{X})-m)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left(g(\mathrm{X})^2\right)-2m\mathbb{E}(g(\mathrm{X}))+m^2\right.\\ &\geqslant \mathbb{E}\left(\left(g(\mathrm{X})^2\right)-2m\sqrt{k}+m^2\right. \qquad \text{par Q29}\end{aligned}$$

On en déduit bien que $(\sqrt{k}-m)^2\leqslant\mathbb{E}\left((g(\mathrm{X})-m)^2\right)$

Q 31) Avec Q30 et Q28, on a en particulier

$$(\sqrt{k}-m)^2\leqslant 32=\frac{a}{b}$$

Avec $\delta=m-\sqrt{k}$, la condition énoncée après la Q9 est donc vérifiée, pour la v.a. $g(X)-m$ avec $a=4$ et $b=1/8$ et il vient bien avec Q12, pour tout $t>0$

$$P(|g(X)-m+\delta|\geqslant t)=P(|g(X)-\sqrt{k}|\geqslant t)\leqslant 4\mathrm{e}^4\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{16}}.$$

Q 32) On a $\overline{E_{i,j}}=\{|\|A_k u\|-1|>\varepsilon\}$ et en appliquant le résultat de la question précédente à $u=\frac{v_i-v_j}{\|v_i-v_j\|}$ qui est bien unitaire, on a directement

$$P\left(\overline{E_{i,j}}\right)<\delta$$

Q 33) Il vient par sous-additivité

$$P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}\right)=1-P\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N}\overline{E_{i,j}}\right)\geqslant 1-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}P\left(\overline{E_{i,j}}\right)\geqslant 1-\delta\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}1=1-\frac{N(N-1)}{2}\delta$$

comme voulu.

Q 34) On choisit $\delta>0$ tel que $\frac{N(N-1)}{2}\delta<1$ i.e.$\delta<\frac{2}{N(N-1)}$, par exemple (largement) $\delta=\frac{1}{N^2}$. On constate alors que

$$P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}\right)>0$$

de sorte qu'il existe en particulier des valeurs de la variable aléatoire X telles que tous les événements $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\1\leqslant j\leqslant N}}$ soient simultanément réalisés (on notera que par symétrie des rôles, $E_{i,j}=E_{j,i}$), ce qui revient à dire que pour une telle valeur de X, A_k est canoniquement associée à une ε-isométrie f pour $(\nu_1,\ldots,v_N)$, et donc en particulier qu'un tel objet existe. Ce choix impose

$$k\geqslant 160\frac{\ln\left(N^2\right)}{\varepsilon^2}=320\frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}.$$

On constate donc que la constante $c=320$ convient, ce qui démontre le théorème de Johnson et Lindenstrauss.