D.M. 13 : Cauchy-Lipschitz et l'exponentielle matricielle

Pour le lundi 25 mars 2024

Partie I : démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Le résultat qui suit sera du cours au chapitre D3 mais sa démonstration n'est pas exigible dans le programme.

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, une application $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K}))$, c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $A(t) \in M_n(\mathbb{K})$ et une fonction $B \in \mathcal{C}(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Dans ce qui suit, on note $F = M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Les équations différentielles d'inconnues vectorielles que nous étudierons dans ce chapitre consisteront dans le recherche d'une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, F)$ vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall\, t \in I,\ X'(t) = A(t).X(t) + B(t) \tag{E}$$

Le héros de cette théorie est le :

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : avec les hypothèses précédentes, si on fixe un $t_0 \in I$ et un $X_0 \in F$, alors il existe une unique solution $t \mapsto X(t)$ de (E) sur I vérifiant $X(t_0) = X_0$.

Le but de ce qui suit est de donner une démonstration de ce théorème.

Pour tout le problème, on choisit arbitrairement une norme $\|\cdot\|$ sur F et pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ on note $|||M|||$ la norme subordonnée à ce choix de norme sur F pour l'application linéaire $X \mapsto M.X$.

1) a) Rappeler les définitions équivalentes de la norme subordonnée.
   b) Montrer que X vérifie (E) sur I avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$ si, et seulement si,

$$\forall\, t \in E,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + b(s))\mathrm{d}s. \qquad \text{(formulation intégrale du pb. de Cauchy)}$$

Pour les questions 2. à 4. on définit une suite (Φ_n) de fonctions de I dans F par :

$$\forall t \in I, \Phi_0(t) = X_0 \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \Phi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s).\Phi_n(s) + B(s))\,\mathrm{d}s.$$

2) Justifier que les fonctions Φ_n sont bien définies et de classe C^1.
3) Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$ inclus dans I et contenant t_0.
   a) Justifier l'existence des réels $\mu = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |||A(t)|||$ et $M = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|\Phi_1(t) - \Phi_0(t)\|$.
   b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leqslant \mu \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\|\,\mathrm{d}s$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leqslant \frac{M\mu^n |t-t_0|^n}{n!}$.
4) **Preuve de l'existence de Cauchy-Lipschitz :**
   a) Montrer que la suite (Φ_n) converge uniformément sur tout segment de I. En particulier, la suite (Φ_n) converge simplement sur I ; on note Φ sa limite simple.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$ on pose $\Psi_n(t) = A(t)\,(\Phi_n(t)) + B(t)$. Montrer que la suite (Ψ_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction Ψ que l'on précisera.
   c) Montrer que Φ est solution de du problème de Cauchy défini par $((E), \Phi(t_0) = X_0)$.
5) **Preuve de l'unicité :** Soient maintenant X_1 et X_2 deux solutions de (E) vérifiant la même condition initiale $X_i(t_0) = X_0$ pour $i = 1, 2$. On pose $\Delta = X_1 - X_2$.
   a) Montrer : $\forall t \in I, \Delta(t) = \int_{t_0}^{t} A(s).(\Delta(s))\mathrm{d}s$.
   b) On considère de nouveau un segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I et contenant t_0. On définit μ comme au 3.a) mais on pose cette fois $M = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|\Delta(t)\|$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [\alpha, \beta], \|\Delta(t)\| \leqslant \frac{M\mu^n\,|t - t_0|^n}{n!}.$$

   c) Conclure que $X_1 = X_2$.

II La question de la surjectivité de l'exponentielle matricielle

6) **Deux questions préliminaires :**

   a) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On décompose son polynôme caractéristique en $\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}$, où les λ_i sont tous distincts. Montrer que A est semblable une matrice A' de la forme $\operatorname{Diag}(\lambda_1 I_{r_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{r_k} + N_k)$, où les N_i sont des matrices nilpotentes.

   b) Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, une fonction de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}, M(t)$ et $M'(t)$ commutent.

      (i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto M(t)^k$ est de classe C^1, de dérivée $t \longmapsto kM'(t)M(t)^{k-1}$.

      (ii) En déduire que la fonction $t \longmapsto \exp M(t)$ est de classe C^1, de dérivée $t \longmapsto M'(t)\exp M(t)$.

7) **Le logarithme de $\boldsymbol{I+N}$:** Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$, une matrice nilpotente. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} N^k.$$

   a) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}, (I_n + tN) L'(t) = N$.

   b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C}),\ t \mapsto (I_n + tN)\exp(-L(t))$. Calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   c) Calculer $\exp L(1)$.

   d) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\mu} = \lambda$.

   e) En déduire qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp M = \lambda I_n + N$.

8) **La surjectivité annoncée dans le cas complexe :** A l'aide de ce qui précède montrer que : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est *surjective.*

9) **Une surjectivité déduite :** En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $p_k : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}),\ M \mapsto M^k$ est *surjective.*

10) **Un raffinement utile pour la suite :** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On va ici améliorer le résultat du 8. en montrant qu'il existe en fait $M \in \mathbb{C}[A]$ (ensemble des polynômes en A) telle que $\exp M = A$.

    a) Prouver ce résultat dans le cas particulier où A est de la forme $\lambda I_n + N$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et N nilpotente.

    Dans le cas général, on reprend les notations du 6.a), on note $A'_i = \lambda_i I_{r_i} + N_i$ et μ_i le polynôme minimal de A'_i. Selon a), pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp P_i(A'_i) = A'_i$.

    b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,k]\!], \mu_i$ divise $P - P_i$.

    c) P étant ainsi choisi, montrer que $\exp P(A') = A'$, puis que $\exp P(A) = A$.

11) **L'exponentielle réelle ne surjecte pas sur $\boldsymbol{GL_n^+}(\mathbb{R})$:** On va démontrer l'équivalence :

$$\exists M \in M_n(\mathbb{R}), \exp M = A \Longleftrightarrow \exists R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), R^2 = A$$

    a) Démontrer l'implication $\Longrightarrow$.

    On suppose maintenant que $A = R^2$, avec $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

    b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp P(R) = R$.

    c) En considérant $P + \overline{P}$, en déduire une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp M = A$.

    d) Montrer que l'image de l'exponentielle matricielle réelle est strictement incluse dans l'ensemble :

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A > 0\}$$

    Indication : on cherchera une matrice D diagonale dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ avec au moins une entrée négative (donc au moins deux) pour laquelle on soit sûr que si $\exp(M) = D$ alors M est aussi diagonale, pour arriver à une contradiction.

III Autour de la validité de la formule $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

12) Dans cette question seulement, on suppose que A et B commutent.

   a) Montrer que A et $\exp(B)$ commutent.

   b) On note $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(tA)$ et $g : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto \exp(t(A+B)).\exp(-tB)$. Montrer que f et g sont solution du même problème de Cauchy linéaire.

   c) En déduire une démonstration de la relation

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \exp(tA).\exp(tB) = \exp(t(A+B)) \qquad (*)$$

   d) Donner une autre démonstration de cette égalité $(*)$ à l'aide des développements en série entière.

13) Réciproque : on ne suppose plus que A et B commutent a priori, mais on suppose que $(*)$ est vérifiée. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

L'objectif du reste de cette partie est de prouver, pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ la relation

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k = \exp(A+B) \qquad \text{(TK)}$$

appelée *formule de Trotter-Kato*.

Pour k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right).$$

14) Dans cette partie on fixe une norme d'algèbre $\|\ \|$ sur $M_n(\mathbb{K})$. Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

On introduit la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} - \mathbf{e}^{t(A+B)} \end{array}$$

15) Montrer que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \to +\infty$$

16) Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i\,(X_k - Y_k)\,Y_k^{k-i-1}$$

17) En déduire la relation (TK).