

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 HEURES

*Les calculatrices ne sont pas autorisées*

**Notations**

Soit  $n$  et  $p$  des entiers supérieurs ou égaux à 1.  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. On identifiera  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  respectivement à  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle_p$ . Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement  $\| \cdot \|_n$  et  $\| \cdot \|_p$ .

On notera  $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$  celle de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Lorsque  $p = n$ ,  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est noté plus simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et est muni de sa structure d'algèbre,  $I_n$  représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$  désigne la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $0_n$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour  $A$  appartenant à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  ${}^t A$  désigne la matrice transposée de  $A$  : c'est un élément de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ .

$\text{Ker } A$  est le noyau de  $A$  défini par

$$\text{Ker } A = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$$

$\text{Im } A$  est l'image de  $A$  définie par

$$\text{Im } A = \{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}$$

Enfin, on adopte la notation  $F^\perp$  pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace euclidien.

**Partie I**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

**I.1.** Montrer que  ${}^t AA$  est nulle si et seulement si  $A$  est nulle.

Dans toute la suite du problème  $A$  sera supposée non nulle.

**I.2.** Montrer que les matrices  ${}^t AA$  et  $A {}^t A$  sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

**I.1.a)**  $X, Y$  désignant deux éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , exprimer le produit scalaire  $\langle X | Y \rangle_n$  sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si  $W$  est un vecteur propre de  ${}^tAA$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , exprimer  $\|AW\|_n^2$  en fonction de  $\lambda$  et  $\|W\|_p$ .

c) En déduire que les valeurs propres de  ${}^tAA$  sont réelles, positives ou nulles.

**I.4.a)** Pour  $x$  réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices  ${}^tAA$  et  $A^tA$  ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices  ${}^tAA$  et  $A^tA$  ont même rang.

**I.5.** Montrer que si  $n > p$ , 0 est valeur propre de  $A^tA$  et que si  $n < p$ , 0 est valeur propre de  ${}^tAA$ .

**I.6.** On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  ${}^tAA$ , chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose  $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$  pour tout  $i$  élément de  $\{1, 2, \dots, p\}$ .

*Les réels  $\mu_i$  sont appelés valeurs singulières de  $A$ .*

On suppose les réels  $\lambda_i$  ordonnés tels que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ .

a) Montrer que  $\lambda_1$  est non nul.

On définit alors un unique entier naturel  $r$  appartenant à  $\{1, 2, \dots, p\}$  comme suit : si toutes les valeurs propres de  ${}^tAA$  sont non nulles,  $r = p$ , sinon  $r$  est tel que pour tout  $i \leq r$ ,  $\lambda_i > 0$  et pour tout  $i > r$ ,  $\lambda_i = 0$ .

Soit  $(V_1, V_2, \dots, V_p)$  une base orthonormale de vecteurs propres de  ${}^tAA$  respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ;  $V_1, V_2, \dots, V_r$  désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque  $r$  est strictement inférieur à  $p$ ,  $V_{r+1}, \dots, V_p$  désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que  $r \leq n$  et que la dimension de  $\text{Ker } A^tA$  est égale à  $n - r$ .

Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ , on pose  $U_i = \frac{1}{\mu_i} AV_i$  et si  $n > r$ , on désigne par  $(U_{r+1}, \dots, U_n)$  une base orthonormale de  $\text{Ker } A^tA$ .

c) Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $AV_i = \mu_i U_i$  et que si  $r$  est strictement inférieur à  $p$ , pour tout  $i \in \{r+1, \dots, p\}$ ,  $AV_i = 0$ .

d) Montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  ${}^tAU_i = \mu_i V_i$ .

e) Montrer que si  $n > r$ , pour tout  $i \in \{r+1, \dots, n\}$ ,  ${}^tAU_i = 0$ .

f) En déduire que le système de vecteurs  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  constitue une base orthonormale de vecteurs propres de  $A^tA$  et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur  $U_i$ .

**I.7.** On note  $V$  la matrice carrée réelle d'ordre  $p$  dont le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne est le vecteur  $V_i$ ,  $U$  la matrice carrée réelle d'ordre  $n$  dont le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne est le vecteur  $U_j$  et  $({}^tUAV)_{i,j}$  l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  ${}^tUAV$ .

a) Montrer que :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\}, ({}^tUAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note  $\Delta$  la matrice appartenant à  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  dont tous les éléments  $\Delta_{i,j}$  sont nuls sauf  $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$  respectivement égaux à  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ . Montrer que  $A = U\Delta^t V$ .

La factorisation de  $A$  ainsi obtenue est dite décomposition de  $A$  en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**I.8.** Montrer que le rang de  $A$  est égal à  $r$ .

**I.9.a)** Montrer que  $V = \sum_{i=1}^p V_i^t E_i$ .

b) En déduire :

$$A = \sum_{i=1}^r \mu_i U_i^t V_i \quad , \quad {}^t A A = \sum_{i=1}^r \lambda_i V_i^t V_i \quad , \quad A^t A = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i^t U_i$$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants :  $\text{Ker } A$ ,  $\text{Ker } {}^t A$ ,  $\text{Im } A$ ,  $\text{Im } {}^t A$ .

d) Montrer que  $\text{Ker } {}^t A A = \text{Ker } A$  et  $\text{Ker } A^t A = \text{Ker } {}^t A$ .

## Partie II

Avec les notations de la partie I, pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  admettant une décomposition en valeurs singulières  $A = U\Delta^t V$ , on appelle  $\Delta^+$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  dont tous les éléments  $\Delta_{i,j}^+$  sont nuls sauf  $\Delta_{11}^+, \Delta_{22}^+, \dots, \Delta_{rr}^+$  respectivement égaux à  $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \dots, \frac{1}{\mu_r}$  et on pose  $A^+ = V(\Delta^+)^t U$ .

$\Delta^+$  (resp.  $A^+$ ) est appelée pseudo-inverse de  $\Delta$  (resp. de  $A$ ). A priori, la matrice  $A^+$  ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice  $A$ , mais il sera montré à la question **II.9** qu'il n'en est rien et que  $A^+$  est uniquement déterminée à partir de  $A$ .

**II.1.** Déterminer les matrices  $A_0^+, A_0 A_0^+, A_0^+ A_0, A_0 A_0^+ A_0$  et  $A_0^+ A_0 A_0^+$ .

**II.2.** Déterminer  $(A_0^+)^+$ .

**II.,.3** Evaluer  $\Delta^+ \Delta$  et  $\Delta \Delta^+$ .

**II.4.** Montrer que si  $A$  est une matrice carrée inversible ( $n = p = r$ ), alors  $A^+ = A^{-1}$ .

**II.5.** Montrer que :

$$A^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} V_i^t U_i \quad , \quad A A^+ = \sum_{i=1}^r U_i^t U_i \quad , \quad A^+ A = \sum_{i=1}^r V_i^t V_i$$

**II.6.a)** Evaluer  $A A^+ U_j$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  et en déduire que  $A A^+$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\text{Im } A$ .

b) Montrer de même que  $A^+ A$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^p$  sur  $(\text{Ker } A)^\perp$ .

**II.7.** Etablir les identités suivantes :

$$A A^+ = {}^t(A A^+) \quad , \quad A^+ A = {}^t(A^+ A) \quad , \quad A A^+ A = A \quad , \quad A^+ A A^+ = A^+ \quad (1)$$

**II.8.** Etablir les résultats suivants :

i)  $\text{Im } A = \text{Im } AA^+ \quad , \quad \text{Ker } A^+ = \text{Ker } AA^+ \quad , \quad \text{Im } A^+ = \text{Im } A^+A \quad , \quad \text{Ker } A = \text{Ker } A^+A.$

ii)  $\mathbb{R}^n = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A^+ \quad , \quad \mathbb{R}^p = \text{Im } A^+ \oplus \text{Ker } A.$

**II.9.** Soit  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$AB = {}^t(AB) \quad , \quad BA = {}^t(BA) \quad , \quad ABA = A \quad , \quad BAB = B$$

a) Montrer que  $B$  vérifie les identités suivantes :

i)  $B = B^t B^t A = {}^t A^t B B$

ii)  $A = A^t A^t B = {}^t B^t A A$

iii)  ${}^t A = {}^t A A B = B A^t A$

b) En déduire que  $B = A^+$ , autrement dit que  $A^+$  est l'unique matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  vérifiant les relations (1).

**II.10.** Montrer que  $(A^+)^+ = A$  et  ${}^t(A^+) = ({}^t A)^+$ .

**II.11.** Evaluer  $(A_0 B_0)^+$  et  $B_0^+ A_0^+$ . A-t-on l'égalité?

**II.12.** Soit  $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\overline{H} = A^+ H$ . On note  $d(H, \text{Im } A)$  la distance de  $H$  au sous-espace vectoriel  $\text{Im } A$ .

a) Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX - AA^+ H$  et  $H - AA^+ H$  sont orthogonaux et en déduire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad , \quad \|A\overline{H} - H\|_n \leq \|AX - H\|_n$$

Que vaut alors  $d(H, \text{Im } A)$  ?

b) Montrer que s'il existe  $\tilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\|A\tilde{H} - H\|_n = \|A\overline{H} - H\|_n$  avec  $\tilde{H} \neq \overline{H}$ , alors  $\|\overline{H}\|_p < \|\tilde{H}\|_p$ .

c) Si  $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , déterminer  $\inf_{X \in \mathbb{R}^2} \|A_0 X - H\|_3$ .

**Fin de l'énoncé**