CCS 2 2018

1) Il existe une grande similitude entre les attractions Coulombienne et Newtonienne concernant deux points $P(q \text{ ou } m)$ et $M(q' \text{ou } m')$: $\quad \vec{F}_{q\to q'} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM} \qquad \vec{F}_{m\to m'} = -\frac{m'm\,\mathcal{G}}{PM^2}\vec{u}_{PM}$

Le théorème de Gauss de la gravitation s'écrit ainsi : $\oiint \vec{G}.d\vec{S}_{ext} = -4\pi\mathcal{G}m_{int}$

2-4) La distribution est invariante par rotation suivant θ et ϕ : la norme du champ ne dépend que de r .
Tous les plans contenant $\overrightarrow{CM}$ sont des plans de symétrie pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ : $\vec{G}_T(M)$ appartient à tous ces plans, il est donc dirigé suivant $\vec{e}_r$.
On choisit comme surface de Gauss la sphère centrée en C et de rayon r : $\oiint \vec{G}.d\vec{S}_{ext} = 4\pi r^2 G_T(r)$

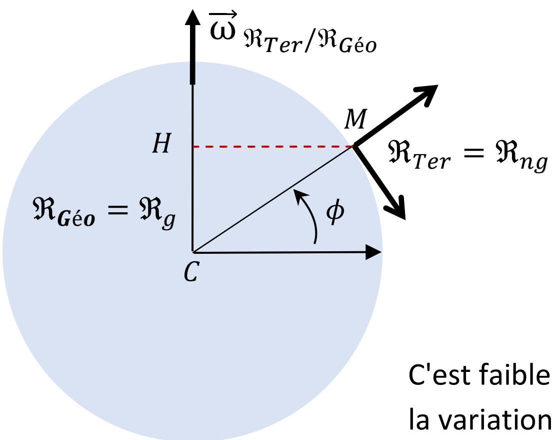
$\vec{G}_T(r) = -\frac{\mathcal{G}M_T\,\vec{e}_r}{(R_T+z)^2} = -\frac{\mathcal{G}M_T\,\vec{e}_r}{R_T^2\left(1+\frac{z}{R_T}\right)^2} \sim -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}\left(1-\frac{2z}{R_T}\right)\vec{e}_r$ On observe une variation de 1% en $z = 31,9\ km$

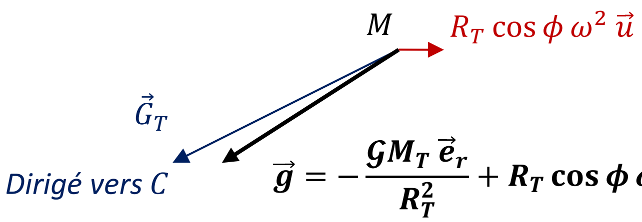
5 & 6) $\overrightarrow{grad}\left(\left\|\vec{G}_T(r)\right\|\right) = -\frac{2\mathcal{G}M_T\,\vec{e}_r}{(R_T+z)^3} \sim -\frac{2\mathcal{G}M_T\,\vec{e}_r}{R_T^3}$ si $z \ll R_T$

Considérons un objet de longueur L, ses deux extrémités ne subissent pas la même force gravitationnelle. Si on s'intéresse au produit **"gradient de gravité $*$ L"**, on a accès à **la différence des forces de gravité** subies par les extrémités de l'objet. Ceci est très utile dans le cas de la stabilisation d'un satellite …

$\left\|-\frac{2\mathcal{G}M_T\,\vec{e}_r}{R_T^3}\right\| \sim 3{,}08.10^{-6}\,s^{-2} = 3{,}08\ \mu gal.cm^{-1}$ Valeur faible, sa mise en évidence nécessite grand soin.

7-9) La force d'inertie a pour expression $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM} = mR_T\cos\phi\,\omega^2\vec{u}$





$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T\,\vec{e}_r}{R_T^2} + R_T\cos\phi\,\omega^2\,\vec{u}$

A l'équateur, $\frac{\|\vec{a}_e\|}{\|\vec{G}_T\|} = \frac{R_T^3\omega^2}{\mathcal{G}M_T} = 0{,}345\ \%$

C'est faible mais pas tant que ça ! Il faut s'élever de 10 km pour que la variation due à l'altitude atteigne ce niveau.

10) La période des petites oscillations est $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sa mesure nous permet d'accéder à g.

11) Lorsque l'horloge à Paris décrit 86400 périodes ($T_P = 1{,}0000\ s$), il s'est écoulé un jour (86400 s).
Alors qu'à Cayenne, lorsque l'horloge décrit 86400 périodes $\left(T_C = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_C}}\right)$, il s'est écoulé 86548 s.

On en déduit $T_C = 1{,}0017\ s \rightarrow g_C = g_P\frac{T_P^2}{T_C^2} = 9{,}78\ m.s^{-2}$

Les valeurs de g sont différentes à Cayenne et à Paris pour plusieurs raisons :

- **La latitude** qui conditionne à la fois la force d'inertie (contribution négative à l'équateur) et le champ gravitationnel à cause de l'aplatissement de la Terre aux pôles (contribution positive à l'équateur)
- L'altitude qui contribue (faiblement) de façon négative : $\frac{\Delta g^{alt.}}{g} \sim \frac{2*100}{6{,}7.10^6} \sim 0{,}003\ \%$
- Les forces de marée dues à la Lune et au Soleil
- La masse volumique hétérogène du sous-sol

12) $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \rightarrow \frac{u(g)}{g} = 2\frac{u(T)}{T} \rightarrow \frac{u(T)}{T} \sim \frac{10^{-8}}{2*9{,}8} \sim \boldsymbol{5.10^{-10}}$ L'exigence est trop grande !

13) La raideur d'un ressort usuel est de 5 $N.m^{-1}$ environ. Prenons une masse de 50 g, l'élongation x du ressort à l'équilibre est de 10 cm environ : $\Delta x = \frac{m\Delta g}{k} = \boldsymbol{1\ nm}$! La technique n'est pas adaptée.

14) Un ressort de longueur nulle au repos permet de diminuer l'incertitude sur Δx car $x = l_{éq}$ et non plus $x = l_{éq} - l_0 \rightarrow u(\Delta x) = u(l_{éq,2} - l_{éq,1}) = \boldsymbol{\sqrt{2}\, u(l_{éq})}$ au lieu de $u(\Delta x) = \sqrt{2}\sqrt{u^2(l_{éq}) + u^2(l_0)}$

15) Heu ? Si on en reparlait après la question 27 ? ! En faisant un effort d'imagination, on peut prédire qu'une variation de g se traduira par un angle θ à l'équilibre et une période d'oscillations différents …

16 & 17) $\mathcal{E}_p = \boldsymbol{\frac{1}{2}k(s - s_0)^2 - mga\sin\theta} + cste$ $\qquad s = \sqrt{\boldsymbol{y^2 + b^2 + 2yb\sin\theta}}$ Al-Kashi !

18) $\Gamma = mga\cos\theta - k(s - s_0)\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta\left(mga - k(s - s_0)\frac{yb}{s}\right) = \boldsymbol{\cos\theta\left(mga - kyb + \frac{kybs_0}{s}\right)}$

19) La longueur "y" est ajustée afin d'atteindre l'équilibre pour tout θ. Si $\theta_{éq} \neq \frac{\pi}{2}$, $\Gamma = 0 \rightarrow \boldsymbol{g = \frac{kyb}{ma}}$
Avec un ressort classique, $g = \frac{kyb}{ma}\left(1 - \frac{s_0}{s_{éq}}\right)$. La mesure serait possible mais nécessiterait la détermination de s_0 , s et de leur incertitude … On abandonne l'idée ! Le ressort classique doit être tendu $(s_{éq} > s_0)$

20) $s = \sqrt{\boldsymbol{y^2 + b^2 + 2yb\sin(\theta - \phi)}}$ $\qquad \mathcal{E}'_p = \boldsymbol{\frac{1}{2}k(y^2 + b^2 + 2yb\sin(\theta - \phi)) - mga\sin\theta} + cste$

21) Sans inclinaison, $\boldsymbol{\theta_{éq} = \frac{\pi}{2}}$ et **peut** correspondre à un équilibre instable si $kyb > mga$ (cas de la figure)
Avec inclinaison, $\theta_{éq}$ vérifie la relation $kyb\cos(\theta_{éq} - \phi) = mga\cos\theta_{éq}$, cet équilibre est **toujours stable**.
La comparaison est biaisée mais nous répondrons ce que l'examinateur veut lire :
L'inclinaison permet d'obtenir un équilibre **stable** à $\boldsymbol{\theta_{éq} \neq \frac{\pi}{2}}$

22) $\Gamma' = mga\cos\theta - kyb\cos(\theta - \phi) = (mga - kyb\cos\phi)\cos\theta - kyb\sin\theta\sin\phi$

23 & 24) T.M.C. au système : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{kyb\phi}{J}\theta = \frac{mga - kyb}{J}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\boldsymbol{\frac{kyb\phi}{J}}}$ $\quad \theta_0 = \boldsymbol{\frac{mga - kyb}{kyb\phi}}\left(= \frac{mga - kyb\cos\phi}{kyb\sin\phi}\right)$

25 & 26) $\phi = \frac{4\pi^2 J}{mg_0aT^2} = \frac{4\pi^2 a}{g_0T^2} = \boldsymbol{9{,}9.10^{-5}\ rad}$ $\quad \theta'_0 = \frac{m\Delta g a}{kyb\phi} = \boldsymbol{\frac{\Delta g}{g_0\phi}}$ $\quad \left(\theta'_0 = \frac{m\Delta g a}{kyb\sin\phi} = \frac{\Delta g\cos\phi}{g_0\sin\phi}\right)$

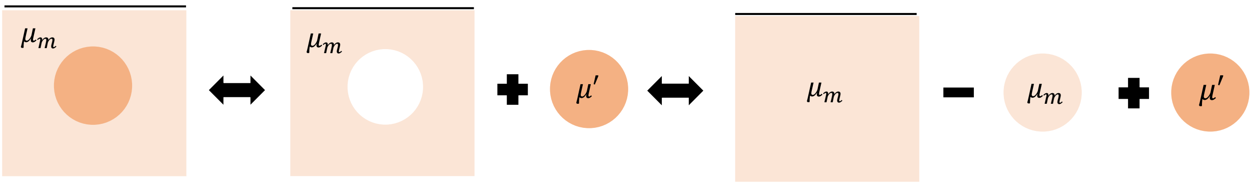
$(mg_0a = kyb)$ $\qquad (mg_0a = kyb\cos\phi)$

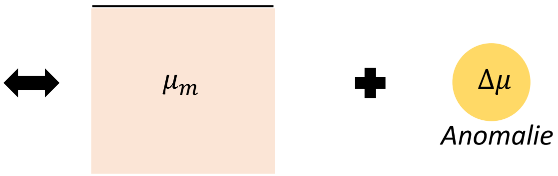
27) $\boldsymbol{\theta'_0 = 1{,}0.10^{-4}\ rad \sim 0{,}34\ '}$ L'angle est petit mais mesurable.
En goniométrie pure cela risque d'être un peu juste mais avec un grossissement, c'est tout à fait possible.

28) En assimilant le champ de pesanteur au champ gravitationnel $\vec{g}_B(r) = -\frac{4\pi R^3(\mu_m+\Delta\mu)\mathcal{G}}{3r^2}\vec{e}_r$

29) $g_{Bz} = \frac{4\pi R^3(\mu_m+\Delta\mu)\mathcal{G}}{3r^2}\cos\theta = \frac{4\pi R^3(\mu_m+\Delta\mu)\mathcal{G}h}{3(h^2+x^2)^{3/2}}$

30-34) La distribution de masse peut être décomposée ainsi :





On reprend l'expression précédente mais avec $\Delta\mu$ au lieu de $\mu_m + \Delta\mu$:

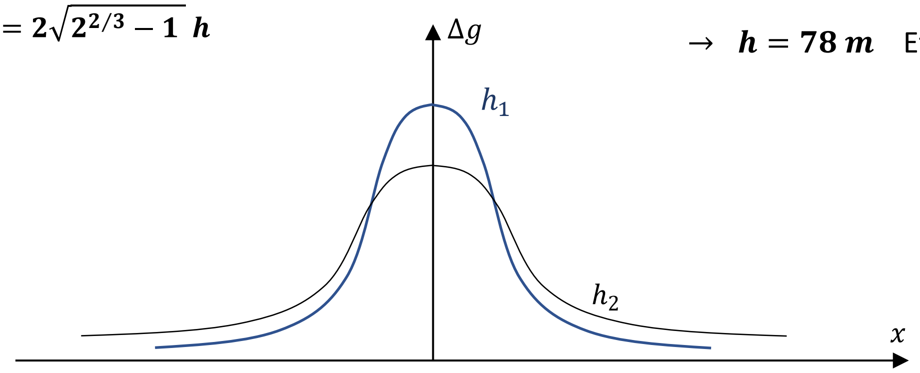
$$\Delta g = \frac{4\pi R^3\Delta\mu\mathcal{G}h}{3(h^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\Delta g_{max} = \frac{4\pi R^3\Delta\mu\mathcal{G}}{3h^2}$$

$$\Delta x_{mh} = 2\sqrt{2^{2/3}-1}\ h$$

Dans le cas de la figure 8, $\Delta g_{max} = 0{,}28.10^{-5}\ m.s^{-2}$ et $\Delta x_{mh} = 120\ m$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{h = 78\ m}$ Et $\boldsymbol{R = 39\ m}$



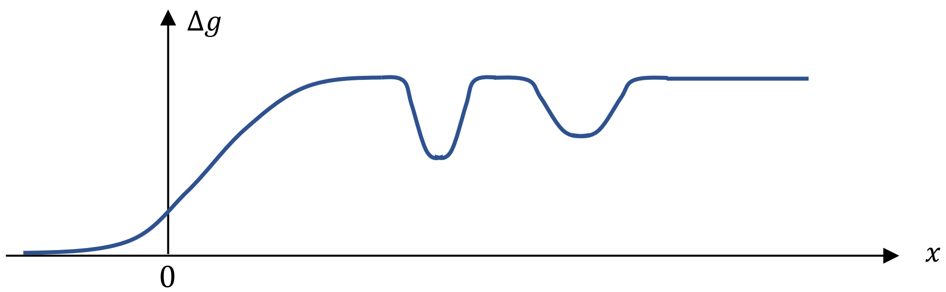
35 & 36) Le champ gravitationnel à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui créé par la même masse placée au centre. Il suffit donc de placer **une boule d'or au centre** de la grotte sphérique**, la masse d'or étant égale à la masse de terre déblayée** !

On évalue $\mu_m \sim \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$ $\rightarrow$ $m = \frac{4}{3}\pi R^3\mu_m \sim \frac{R^3}{R_T^3}M_T = 23\ tonnes$ Ce résultat est surestimé car la croûte terrestre est moins dense ($\mu_m \sim 3.10^3\ kg.m^{-3}$) $\rightarrow$ $m = \frac{4}{3}\pi R^3\mu_m \sim \boldsymbol{13\ t}$ $(R_{or} \sim 54\ cm)$

A la cotation du 12 décembre 2019, cela représente un trésor de 500 millions d'euros … Une pelle, vite !

La sensibilité des gravimètres n'est pas si fine, un gros écart autour de la valeur ne permettrait pas d'être démasqué : $\Delta m = \frac{4}{3}\pi R^3\Delta\mu = \frac{h^2}{\mathcal{G}}\Delta g = 2{,}4\ t$ (La contribution de notre or au champ total est faible).

37) Les deux grottes créent deux **anomalies négatives, la première étant la plus creuse** :



38) $\rho j = E \;\rightarrow\; \rho \frac{I}{A} = \frac{U}{L} \;\rightarrow\; RI = U$ Avec $\boldsymbol{R = \frac{\rho L}{A}}$

39) On évite ainsi des phénomènes capacitifs qui **accumuleraient des charges** aux abords des électrodes et qui **diminueraient la tension effectivement** appliquée.

40 & 41) Le milieu étant homogène, les lignes de courant sont **rectilignes**.

Le courant I se conserve à travers chaque **hémisphère** de rayon r : $\boldsymbol{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}} \rightarrow \boldsymbol{\vec{E} = \frac{\rho I\, \vec{e}_r}{2\pi r^2}} \rightarrow \boldsymbol{V = \frac{\rho I}{2\pi r}}$

42) On superpose deux états semblables au précédent $\left(\vec{E}_A = \frac{\rho I\, \vec{e}_{rA}}{2\pi r_A^2}\ ;\ \vec{E}_B = -\frac{\rho I\, \vec{e}_{rB}}{2\pi r_B^2}\right)$: $\boldsymbol{V(P) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$

Les équipotentielles sont définies par l'équation $\boldsymbol{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} = cste}$

43 & 44) $\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB}\right) \rightarrow \boldsymbol{f = \frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB}} \;\rightarrow\; \boldsymbol{f_{Wenner} = \frac{1}{l}}$

45) $\boldsymbol{f_{Wenner} = 0,30\ m^{-1}}$ Plaçons-nous aux points $\boldsymbol{M(-1,7;0)}$ et $\boldsymbol{N(1,7;0)}$, on lit $\boldsymbol{\Delta V = 2,4\ V}$

$\rightarrow \boldsymbol{\rho = 1,0.10^2\ \Omega.m}$ L'accord est parfait !

46) Les lignes de courant sont des lignes de champ $\vec{E}$, elles sont donc **orthogonales aux équipotentielles.**

47) Si AB est faible, peu de lignes de courant traverseront la couche inférieure $\rightarrow$ $\boldsymbol{\rho_{ap} = \rho_1}$.

Si AB est très grande, la plupart des lignes de courant traverseront la couche inférieure sur une longue distance $\rightarrow$ $\boldsymbol{\rho_{ap} = \rho_2}$.

48) $\boldsymbol{\rho_1 = 400\ \Omega.m \quad \rho_2 = 40\ \Omega.m}$ Nous allons donc suivre la courbe paramétrée par $\boldsymbol{\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,1}$

On relève figure 18 la valeur de $\boldsymbol{\frac{\rho_a}{\rho_1} = \frac{170}{400} \sim 0,43}$ en $\boldsymbol{\frac{AB}{2} = 8,0\ m}$.

L'intersection de la courbe paramétrée "0,1" avec l'horizontale "0,43" se produit en $\boldsymbol{\frac{AB}{2h_1} \sim 2,2}$

On en déduit que h_1 est de l'ordre de $\boldsymbol{4\ m.}$