

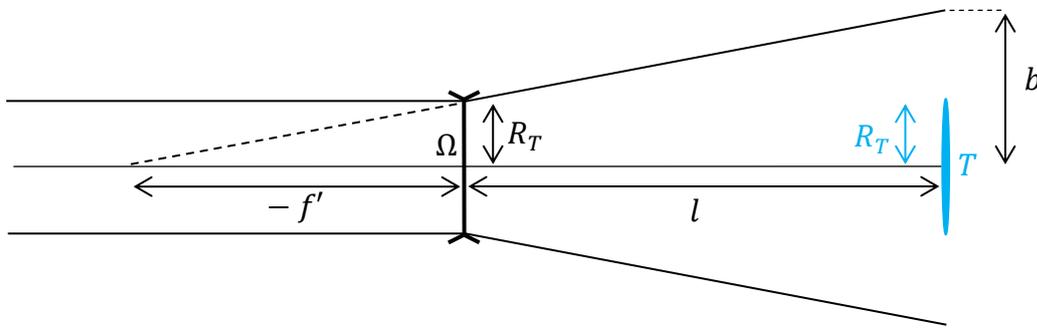
1) [Quelle question étrange ! Répondre d'un point de vue purement géométrique à une exigence aussi précise (1,8 %) sans parler d'absorption ni de réflexion me laisse dubitatif. Ceci étant dit, il est question ici de détourner une partie des rayons lumineux qui, sans lentille, atteindraient la Terre.]

Hypothèses : Le Soleil est **ponctuel** et suffisamment éloigné pour supposer que son image se situe **au foyer image** de la lentille. La densité de puissance est uniforme quelle que soit la direction des rayons. Ainsi, la puissance véhiculée par un faisceau est proportionnelle à sa section.

On note b , le rayon du faisceau dévié à son passage au niveau de la Terre. Comme le faisceau éclairant la Terre sans lentille est le même que celui traversant la lentille (même rayon !), on en déduit que la puissance qu'aurait reçue la Terre sans lentille est celle contenue dans le faisceau de rayon b .

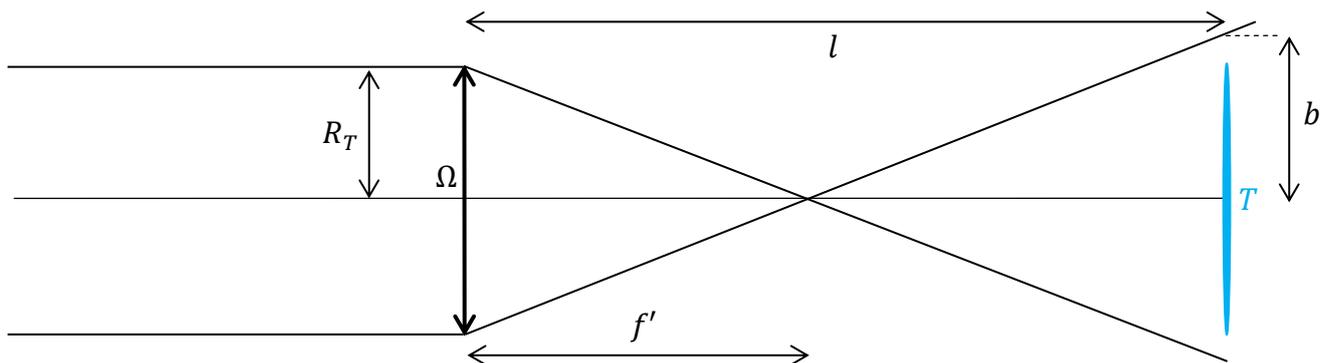
Ainsi, on veut que $\frac{b^2 - R_T^2}{b^2} = 1,8\% \rightarrow \frac{R_T^2}{b^2} = 0,982 \rightarrow \frac{b}{R_T} = 1,01$

On envisage dans un premier temps une lentille divergente.



$$\frac{R_T}{-f'} = \frac{b}{l - f'} \rightarrow \frac{l - f'}{-f'} = 1,01 \rightarrow f' = -\frac{l}{0,01} = -1,50 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (\sim -D)$$

On peut aussi imaginer l'utilisation d'une lentille convergente.



$$\frac{R_T}{f'} = \frac{b}{l - f'} \rightarrow \frac{l - f'}{f'} = 1,01 \rightarrow f' = \frac{l}{2,01} = 7,46 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (\text{Avec } l = 1,50 \cdot 10^9 \text{ m})$$

Mais ces résultats sont faux car le rayon angulaire du Soleil vu de L_1 (ou de la Terre) n'est pas négligeable, il est même supérieur à celui de la lentille vue depuis la Terre : $\frac{R_S}{D-l} = 4,7 \cdot 10^{-3} > \frac{R_T}{l} = 4,2 \cdot 10^{-3}$

[Je pense néanmoins que le jury attendait ces réponses car la résolution exacte, simplement du point de vue de l'optique géométrique, est bigrement difficile et de plus s'avèrerait insuffisante.]

2) La distribution est invariante par rotation suivant θ et ϕ (coordonnées sphériques) : la norme du champ ne dépend que de r . Tous les plans contenant \overline{OM} sont des plans de symétrie pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ : $\vec{G}(M)$ appartient à tous ces plans, il est donc dirigé suivant \vec{e}_r . On applique le théorème de Gauss gravitationnel avec comme surface de Gauss, la sphère centrée en O et de rayon r : $\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S}_{ext} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi GM \rightarrow \vec{G}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r = -\overrightarrow{grad} V(r) \rightarrow V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$

3) D'après la 2^{ème} loi de Newton appliquée à P et projetée sur \vec{e}_r : $-mr\omega^2 = -\frac{GmM}{r^2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$

4) Un point de Lagrange L de masse m est à l'équilibre dans \mathcal{R} non galiléen sous l'effet de trois forces, les deux attractions gravitationnelles ($\vec{F}_{T \rightarrow L} = -\frac{GmM_T}{TL^3} \overline{TL}$, $\vec{F}_{S \rightarrow L} = -\frac{GmM_S}{SL^3} \overline{SL}$) et la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AL}) = m\omega^2 \overline{HL}$ avec H le projeté orthogonal de L sur (Az) . La somme de ces trois forces étant nulle, \overline{TL} et \overline{SL} sont donc orthogonaux à $(Az) \rightarrow z = 0$ (et $H = A$)

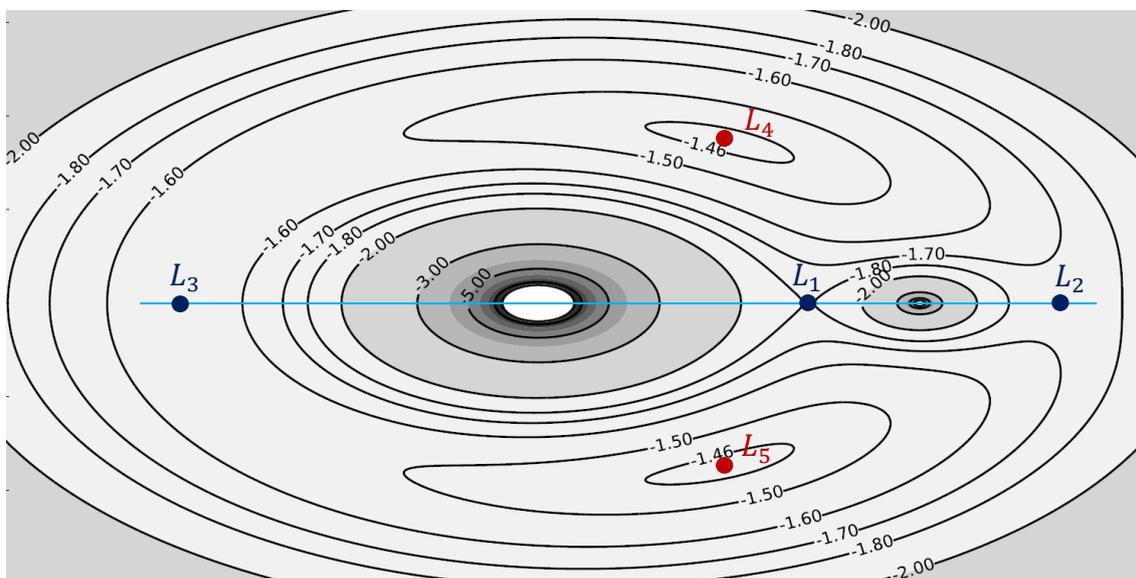
Sur (Ax) et (Ay) , on a
$$\begin{cases} -\frac{M_T}{TL^3}(x-x_T) - \frac{M_S}{SL^3}(x-x_S) + \frac{M}{D^3}x = 0 \\ -\frac{M_T}{TL^3}y - \frac{M_S}{SL^3}y + \frac{M}{D^3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a(x-x_T)}{TL^3} - \frac{(1-a)(x-x_S)}{SL^3} + \frac{x}{D^3} = 0 \\ -\frac{ay}{TL^3} - \frac{(1-a)y}{SL^3} + \frac{y}{D^3} = 0 \end{cases}$$

Avec $TL = \sqrt{(x-x_T)^2 + y^2} = \sqrt{(x-(1-a)D)^2 + y^2}$ et $SL = \sqrt{(x-x_S)^2 + y^2} = \sqrt{(x+aD)^2 + y^2}$

5) En effet, si $L(x, y, 0)$ est solution alors $L'(x, -y, 0)$ l'est aussi.

6) Les points de Lagrange se situent en des lieux où la différentielle de l'énergie potentielle est nulle (stationnarité). Les points L_4 et L_5 sont des **maximums locaux** de l'énergie potentielle. Ils correspondent pourtant à des positions d'équilibre **stables** car l'étude de la stabilité nécessite la prise en compte de la force d'inertie de Coriolis qui, dans ce cas, maintient un objet à proximité de ces deux points. Ils forment chacun un triangle équilatéral avec le Soleil et la Terre (ce que ne montre pas la figure dilatée selon x !).

Les points L_1, L_2 et L_3 sont des points selles (ou cols), ils correspondent à un **maximum selon x** et à un **minimum selon y** . Ce sont des positions d'équilibre **instables**, la force d'inertie de Coriolis ne permet pas le confinement d'objet à proximité de ces trois points.



[Pour plus de détails, se reporter à l'exercice 12 du TD Mécanique en référentiel non galiléen]

7) $a = 3,0 \cdot 10^{-6}$ Si a valait 0, ε serait nul.

Le point L_1 serait en lieu et place de la Terre et tournerait en effet à la vitesse $\omega = \sqrt{\frac{GM_S}{D^3}}$

8) En écrivant $\frac{1-a}{(D-\varepsilon)^2} \sim \frac{(1-a)}{D^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{D}\right)$, l'équation (I.2) devient $\varepsilon \sim \sqrt[3]{\frac{a}{3-2a}} D \sim \sqrt[3]{\frac{a}{3}} D = 1,5 \cdot 10^9 \text{ m}$

9) La valeur calculée correspond à l'**abscisse du maximum** de gauche sur le zoom, c'est-à-dire $x = 0,99D$

10) L'origine de cette équation est la 2^{ème} loi de Newton appliquée à P dans \mathcal{R} non galiléen projetée sur x :

L'**accélération de P** selon x dans \mathcal{R} donne naissance au terme $\frac{d^2u}{d\tau^2} : \frac{d^2\alpha}{dt^2} = D \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{D\omega^2}{4\pi^2} \frac{d^2u}{d\tau^2}$

La somme de la **force d'inertie d'entraînement** et des **deux forces gravitationnelles** est à l'origine du

terme $4\pi^2 \left(1 + \frac{2a}{\varepsilon^3} + \frac{2(1-a)}{(1-\varepsilon)^3}\right) u$

La **force d'inertie de Coriolis** selon x est proportionnelle au terme $4\pi \frac{dv}{d\tau} : 2m\omega \frac{d\beta}{dt} = \frac{mD\omega^2}{\pi} \frac{dv}{d\tau}$

11) On reconnaît sur z l'équation d'un **oscillateur harmonique**. Le mouvement du flyer dans la direction

(L_1z) est **sinusoïdal** de période $\frac{2\pi}{\omega} \left(\frac{a}{\varepsilon^3} + \frac{1-a}{(1-\varepsilon)^3}\right)^{-1/2} = T_{an} \left(\frac{a}{\varepsilon^3} + \frac{1-a}{(1-\varepsilon)^3}\right)^{-1/2} = \frac{T_{an}}{2} = 6 \text{ mois}$

On remarque que la variable τ correspond à la date exprimée en année.

12) $\frac{du_p}{d\tau} = 4\pi v_p + 4\pi^2 A u \quad \frac{dv_p}{d\tau} = 4\pi^2 B v - 4\pi u_p \quad \frac{dw_p}{d\tau} = -4\pi^2 C w$

13) Les grandeurs du problème sont **discrétisées** et toutes les dérivées sont interprétées comme des taux de variation : $\frac{d\xi}{d\tau} \rightarrow \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h}$ avec h , le pas temporel exprimé en **année**.

Ainsi, le système précédent permet d'obtenir u_p, v_p et w_p à l'instant $t + h$:

$$u_{p,t+h} = u_{p,t} + 4\pi h(v_{p,t} + \pi A u_t) \quad v_{p,t+h} = v_{p,t} + 4\pi h(\pi B v_t - u_{p,t}) \quad w_{p,t+h} = w_{p,t} - 4\pi^2 h C w_t$$

De même pour u, v et w : $u_{t+h} = u_t + h u_{p,t} \quad v_{t+h} = v_t + h v_{p,t} \quad w_{t+h} = w_t + h w_{p,t}$

14) $h = \text{tau_f}/N \quad \mathbf{u}[0], \mathbf{v}[0], \mathbf{w}[0], \mathbf{up}[0], \mathbf{vp}[0], \mathbf{wp}[0] = \text{init}$

for i in range(1, N) :

$$\mathbf{u}[i] = \mathbf{u}[i-1] + \mathbf{h} * \mathbf{up}[i-1]$$

$$\mathbf{v}[i] = \mathbf{v}[i-1] + \mathbf{h} * \mathbf{vp}[i-1]$$

$$\mathbf{w}[i] = \mathbf{w}[i-1] + \mathbf{h} * \mathbf{wp}[i-1]$$

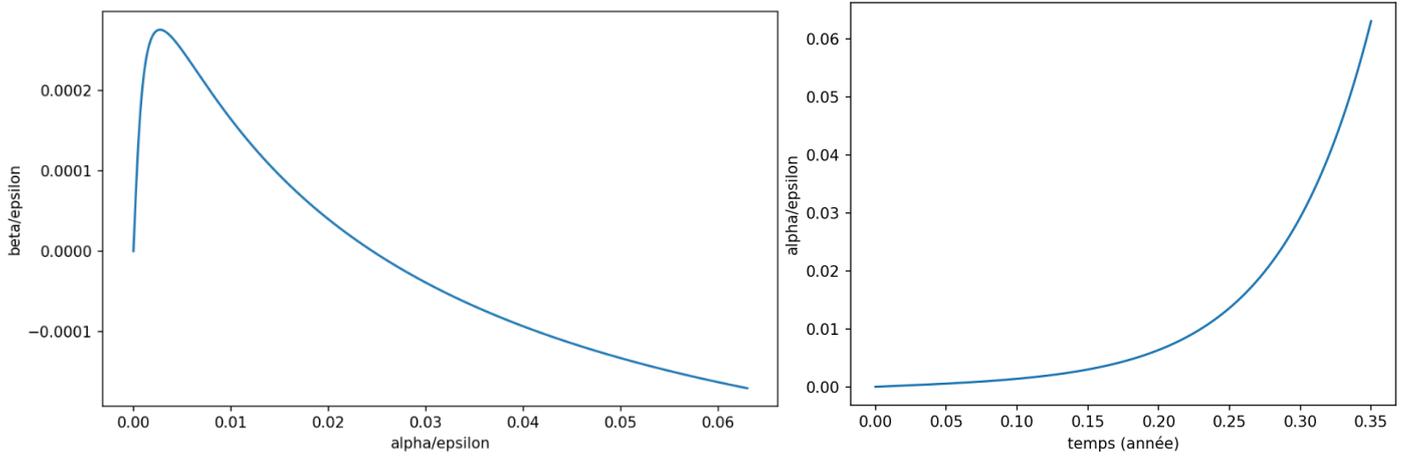
$$\mathbf{up}[i] = \mathbf{up}[i-1] + 4 * \mathbf{np.pi} * \mathbf{h} * (\mathbf{vp}[i-1] + \mathbf{np.pi} * \mathbf{A} * \mathbf{u}[i-1])$$

$$\mathbf{vp}[i] = \mathbf{vp}[i-1] + 4 * \mathbf{np.pi} * \mathbf{h} * (\mathbf{np.pi} * \mathbf{B} * \mathbf{v}[i-1] - \mathbf{up}[i-1])$$

$$\mathbf{wp}[i] = \mathbf{wp}[i-1] - 4 * \mathbf{np.pi} ** 2 * \mathbf{h} * \mathbf{C} * \mathbf{w}[i-1]$$

15-16) Nous observons bien l'**instabilité** selon x et y : Les croissances de $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ et $\frac{\beta}{\varepsilon}$ sont exponentielles alors que $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ se comporte apparemment de façon sinusoïdale. On peut estimer la durée pendant laquelle un flyer reste au voisinage de L_1 au quart de la période du mouvement selon z , c'est-à-dire **1,5 mois** environ.

Les graphes de $\frac{\gamma}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$ et de $\frac{\alpha}{\varepsilon}(t)$ sont représentés page suivante avec une condition initiale proche de celle à l'origine de la figure 4 (init = [0,0,0,1e-4,0,3e-5]) et $A = 9, B = -2, C = 3$.

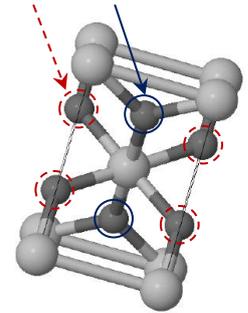
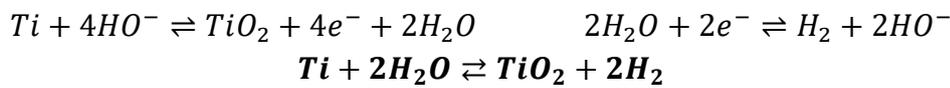


17) La position d'équilibre du nuage de flyers est légèrement **décalée vers le Soleil**. En effet, la pression de radiation pousse le flyer dans la direction de l'onde incidente, c'est-à-dire vers la Terre, ainsi l'attraction gravitationnelle solaire doit être un peu plus forte que celle due à la Terre. Plus le coefficient de réflexion est **grand**, plus le déplacement de cette position d'équilibre sera **important**.

18-20) Une maille contient **2 atomes de titane** ($8 * \frac{1}{8} + 1$) et **4 atomes d'oxygène** ($4 * \frac{1}{2} + 2$)

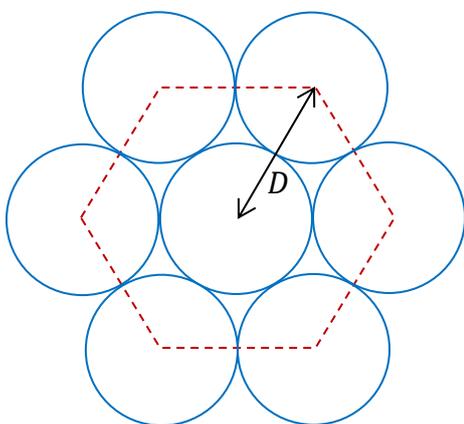
C'est cohérent avec la formule TiO_2 . $\rho = \frac{2M_{Ti} + 4M_O}{N_A a^3} = 4,25 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Les électrons sont extraits du titane par le générateur, c'est le lieu de l'oxydation donc l'**anode**. La contre-électrode est le lieu de la réduction de l'eau (cathode)



21) En supposant que la structure du nanotube soit de type rutile, en évaluant le diamètre extérieur ($D_e = 150 \text{ nm}$) puis le diamètre intérieur ($D_i = 30 \text{ nm}$) du tube et **en négligeant** dans un premier temps le volume entre les tubes, on obtient $\rho_{nano} \sim \frac{D_e^2 - D_i^2}{D_e^2} \rho = 0,96 \rho = 4,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Si l'on veut tenir compte du volume perdu entre les tubes, il faut s'intéresser à une sorte de compacité :



Surface hexagonale : $3 \frac{\sqrt{3}}{2} D^2$ Surface d'un disque : $\frac{\pi}{4} D^2$

Or l'hexagone contient $1 + 6 * \frac{1}{3} = 3$ disques

La proportion de volume occupé par les tubes est donc égale à

$$\frac{\frac{3\pi}{4} D^2}{3 \frac{\sqrt{3}}{2} D^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 91\% \rightarrow \rho_{nano} \sim 3,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

22) La couche formée pendant 900 s a une masse égale à $eS\rho_{nano} = 4,1 \text{ mg} \rightarrow n_{TiO_2} = 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$
 $\rightarrow N_e^{utiles} = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \rightarrow Q_g = 20 \text{ C}$ Or $Q = I\Delta t = 22,5 \text{ C} \rightarrow \theta = 87\%$ (Plutôt bon)

23) Si on note M le centre de masse du nuage de masse m , on a à l'équilibre $\vec{F}_T + \vec{F}_S + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_p = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{F}_p}{m} = \frac{GM_T}{TM^3} \overrightarrow{TM} + \frac{GM_S}{SM^3} \overrightarrow{SM} - \omega^2 \overrightarrow{AM}$ Quel que soit R, M doit se positionner en L_1 si m grandit.

L'accélération créée par \vec{F}_p s'effondre si la masse devient trop grande au contraire de celles provoquées par les forces gravitationnelles et d'inertie, **indépendantes de m !** La force \vec{F}_p devient négligeable.

24) A l'intersection des courbes paramétrées, on évalue la masse nécessaire de flyer à 18.10^9 kg , donc le coût avoisinerait **$1,8.10^{12}$ \$**, c'est-à-dire 2 % du PIB mondial : Vu l'enjeu, c'est tout à fait envisageable.

25) On somme les conductances (dérivation) : $P_c = G(T_{i,ref} - T_{e,ref}) = (\sum U_n S_n + \psi L)(T_{i,ref} - T_{e,ref})$

Avec $T_{e,ref} = -7^\circ\text{C}$ (bigre !) on obtient $P_c = \mathbf{884 \text{ kW}}$, si $T_{e,ref} = 7^\circ\text{C}$ on a alors $P_c = \mathbf{408 \text{ kW}}$

26) L'énergie provient de la réaction (monobare) $\text{CH}_4 + 2 \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{CO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$ en phase **gazeuse !**

Ainsi, il faut tenir compte de la vaporisation de l'eau : $\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_g) = -244 \text{ kJ.mol}^{-1}$

$\Delta_r H^0 = -807 \text{ kJ.mol}^{-1}$ L'avancement molaire est donc égal à $8,5.10^6 \text{ mol} \rightarrow m_{\text{CO}_2} = \mathbf{3,7.10^2 \text{ t}}$

27) Appliquons le premier principe industriel à l'eau chaude en écoulement stationnaire entre x et $x + dx$:

$$Q_m(h(x+dx) - h(x)) = P_{th} \rightarrow Q_m c \frac{dT(x+dx) - T(x)}{dx} = g dx (T_e - T(x)) \rightarrow \frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{Q_m c r} = \frac{T_e}{Q_m c r}$$

$$\mathbf{28) } T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\xi}\right)$$

29) Négliger les échanges thermiques entre les logements revient à négliger la diffusion thermique interne aux logements. Ainsi, la puissance en provenance de l'eau chaude est intégralement refoulée vers l'atmosphère. En d'autres termes, la dépendance en x de T_i est principalement due à celle en x de T et non au flux conductif de type Fourier au sein du logement.

$$g_1(T(x) - T_i(x)) = g_2(T_i(x) - T_e) \rightarrow T_i(x) = \frac{g_1 T(x) + g_2 T_e}{g_1 + g_2} = \frac{r_2 T(x) + r_1 T_e}{r_1 + r_2}$$

30) L'équation (II.1) devient ici $\frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{Q_m c r_1} = \frac{T_i(x)}{Q_m c r_1} \rightarrow \frac{dT_i}{dx} + \frac{T_i(x)}{Q_m c (r_1 + r_2)} = \frac{T_e}{Q_m c (r_1 + r_2)}$ (D'après ci-dessus)

On en déduit que $T_i(x) = T_e + (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\xi_{12}}\right)$ avec $\xi_{12} = Q_m c (r_1 + r_2)$ et $T_{i0} = \frac{r_2 T_0 + r_1 T_e}{r_1 + r_2}$

La condition limite est $T_e + (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{L}{\xi_{12}}\right) = T_{min} \rightarrow T_{i0} = T_e + (T_{min} - T_e) \exp\left(\frac{L}{\xi_{12}}\right) = 24^\circ\text{C}$

Et donc finalement, $T_{0,min} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T_{i0} - \frac{r_1}{r_2} T_e = \mathbf{80^\circ\text{C}}$ [La valeur $T_{i0} = 24^\circ\text{C}$ est confirmée figure 14]

31) Dans notre modèle, $T(L) = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T_{min} - \frac{r_1}{r_2} T_e = \mathbf{58^\circ\text{C}}$

La puissance thermique nécessaire au niveau de la chaudière est donc $Q_m c (T_{0,min} - T(L)) = \mathbf{89 \text{ kW}}$

Autre approche (plus longue) : On pouvait également calculer la valeur moyenne $\langle T_i(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L T_i(x) dx$

$$\langle T_i(x) \rangle = T_e + \frac{1}{L} \int_0^L (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\xi_{12}}\right) dx = T_e + \frac{T_{i0} - T_e}{L} \xi_{12} \left(1 - \exp\left(-\frac{L}{\xi_{12}}\right)\right) = \mathbf{21^\circ\text{C}}$$

Et conclure par $g_2 L (\langle T_i(x) \rangle - T_e) = \mathbf{89 \text{ kW}}$

Pour un autre mode de chauffage où tous les appartements seraient à la température T_{min} , l'apport thermique serait égal à la puissance perdue $g_2 L (T_{min} - T_e) = 75 \text{ kW} \rightarrow$ Le surcoût relatif s'élève à **19 %**

[Cette dernière puissance ne correspond pas à celles calculées à la question 25. Il semblerait ici qu'on ne s'intéresse pas vraiment à l'ensemble de la résidence ($g_2 L = 6,3 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1} < G = 34 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}$)

32) En J , nous avons affaire à un mélange adiabatique d'un débit $Q_{m,1} (= Q_m - Q_{m,2})$ à la température $T(x_J^-)$ et d'un débit $Q_{m,2}$ à la température $T_{0,min}$. Si note $T(x_J^+)$ la température finale du mélange, on a

$$\Delta H = 0 \Leftrightarrow c(Q_m - Q_{m,2})(T(x_J^+) - T(x_J^-)) + cQ_{m,2}(T(x_J^+) - T_{0,min}) = 0$$

$$\Leftrightarrow T(x_J^+) = \left(1 - \frac{Q_{m,2}}{Q_m}\right) T(x_J^-) + \frac{Q_{m,2}}{Q_m} T_{0,min}$$

Avec $T(x_J^-) = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T_i(x_J) - \frac{r_1}{r_2} T_e = T_e + \frac{r_1 + r_2}{r_2} (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{x_J}{\xi_{121}}\right)$ et $\xi_{121} = (Q_m - Q_{m,2})c(r_1 + r_2)$

33) L'équipartition $Q_{m,2} = \frac{Q_m}{2}$ semble un choix pertinent car alors la moyenne des températures des logements est minimale tout en respectant la consigne concernant les logements centraux ($T_{min} = 19^\circ\text{C}$).

34) Il faut rechercher $T'(L)$, la nouvelle température finale de l'eau. Or d'après la figure 14, la température du logement en bout de ligne vaut $T'_i(L) = 19,2^\circ\text{C} \rightarrow T'(L) = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T'_i(L) - \frac{r_1}{r_2} T_e = 59,2^\circ\text{C}$

La puissance au niveau de la chaudière est légèrement plus faible : $Q_m c (T_{0,min} - T'(L)) = 86,1 \text{ kW}$
L'économie est de l'ordre de **4 %** ...

[Toute cette partie II.B est franchement difficile ! Je me demande si j'ai bien compris les questions ...]

35) Rappelons en premier lieu que la conductance d'un matériau de conductivité λ , de section S et d'épaisseur e a pour expression $\frac{\lambda S}{e}$. Ainsi, sa conductance par unité de surface est $U = \frac{\lambda}{e}$.

La conductance thermique calculée à la question 25 ($G = \sum U_n S_n + \psi L = 34,0 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}$) doit être réduite de μG grâce à l'isolant posé sur les murs : $(1 - \mu)G = \underbrace{\sum U_k S_k + \psi L}_{16,1 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}} + U_{m,i} S_m$

Avec $U_{m,i} S_m$, la conductance de l'association mur/isolant **en série** et k , un indice excluant les murs.

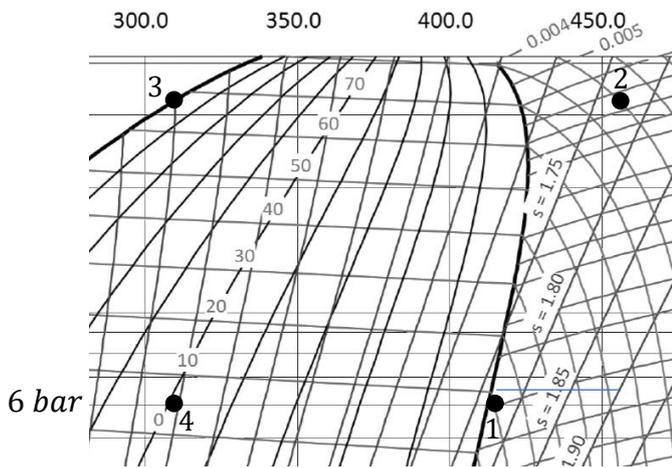
Si on note e l'épaisseur recherchée, $U_{m,i} = \frac{U_m U_i}{U_m + U_i} = \frac{3,16 * 0,037/e}{3,16 + 0,037/e} = \frac{0,117}{3,16 e + 0,037}$

En définitive, $34(1 - \mu) - 16,1 = \frac{0,661}{3,16 e + 0,037} \rightarrow e = 6,9 \text{ cm}$ pour $\mu = 45\%$ \rightarrow **Une couche suffit.**

Le coût est **prohibitif** (1,4 million d'euros) pour $\mu = 48\%$ alors que $\mu_{max} = 53\%$: On arrête là les frais !

36-38) Le COP_{rev} attendu semble être l'efficacité de la machine de Carnot (adiabatiques et isothermes réversibles) qui fonctionnerait entre les mêmes températures extrêmes : $\text{COP}_{rev} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 5,4 > 1,8$

Le rendement par rapport à la machine de Carnot (maximum théorique) est de **33 %**



$$\text{COP} = \frac{|q_c|}{w_u^{comp}} = \frac{|h_3 - h_2|}{h_2 - h_1} = \frac{145}{40} = 3,6$$

Ce coefficient est surestimé vu que la compression réelle **n'est pas isentropique** car **irréversible**, le point 2 réel est plus à droite. La progression relative de w_u^{comp} (dénominateur) est alors supérieure à celle de $|q_c|$ (numérateur), le COP diminue.

Dans la doc, on remarque également que le COP réel dépend en fait du débit. Là encore, on retrouve l'influence néfaste de l'irréversibilité.

Pour expliquer la différence entre les deux COP, on peut citer également **les pertes thermiques** au niveau des échangeurs (la puissance cédée aux habitations est inférieure à celle perdue par le fluide) et **le rendement électromécanique** du compresseur (la puissance électrique consommée est supérieure à la puissance utile mécanique).

[On remarque sur le diagramme une rareté : les isothermes ne sont pas horizontales dans le domaine diphasé. En effet, elles ne coïncident pas avec les isobares car le fluide en question n'est pas un corps pur !]

39) [Il est difficile d'évaluer le débit massique en confrontant les données réelles (puissances nominales) et les enthalpies issues de la modélisation du cycle. Comme on l'a vu précédemment, beaucoup de choses se jouent à l'abri de nos regards. Allons-y quand même, le correcteur devait surtout attendre l'application de la formule " $P = D_m |\Delta h|$ "]

$$D_m |h_3 - h_2| = 58,7 \text{ kW} \rightarrow D_m = 0,40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1} \quad \text{On est très loin des données !}$$

$$D_m (h_2 - h_1) = 32,6 \text{ kW} \rightarrow D_m = 0,82 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1} \quad \text{C'est mieux mais bof ...}$$

Comme l'état 2 réel est mystérieux, on pourrait éviter ce point en exploitant plutôt l'évaporateur :

$$D_m (h_1 - h_4) = 58,7 - 32,6 = 26,1 \text{ kW} \rightarrow D_m = 0,25 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 8,9 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1} \quad \text{C'est pire !}$$

N'y aurait-il pas plusieurs circuits en parallèle ? Les données concerneraient alors le débit total ?

40) Il faut **7** pompes à chaleur pour obtenir une puissance de chauffage égale à $P_c = 408 \text{ kW}$ ($T_e = 7^\circ \text{C}$) et **15** pompes à chaleur pour obtenir une puissance de chauffage égale à $P_c = 884 \text{ kW}$ ($T_e = -7^\circ \text{C}$)

41) Du point de vue de l'émission de gaz à effet de serre il est préférable d'installer des pompes à chaleur à condition que l'électricité consommée ne soit pas produite dans des centrales à charbon ou au fuel !

Du point de vue financier, il faut comparer le prix du MWh de transfert thermique fourni par le gaz (90 €) et le prix du MWh de transfert thermique dégagé par la pompe à chaleur ($200/1,8 = 111$ €). Si on ajoute à cela le prix de l'installation, on s'aperçoit que le choix du remplacement est dicté par un engagement citoyen. Les primes et incitations fiscales sont nécessaires et d'ailleurs, quels seront les coûts de ces énergies à l'avenir ? Le prix de l'énergie est bien sûr lié au marché mais également aux décisions politiques.

25) On somme les conductances (dérivation) : $P_c = G(T_{i,ref} - T_{e,ref}) = (\sum U_n S_n + \psi L)(T_{i,ref} - T_{e,ref})$

Avec $T_{e,ref} = -7^\circ \text{C}$ (bigre !) on obtient $P_c = 884 \text{ kW}$, si $T_{e,ref} = 7^\circ \text{C}$ on a alors $P_c = 408 \text{ kW}$

26) L'énergie provient de la réaction (monobare) $CH_4 + 2 O_2 \rightleftharpoons CO_2 + 2 H_2O$ en phase gazeuse !

Ainsi, il faut tenir compte de la vaporisation de l'eau : $\Delta_f H^0(H_2O_g) = -244 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

$\Delta_r H^0 = -807 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ L'avancement molaire est donc égal à $8,5 \cdot 10^6 \text{ mol} \rightarrow m_{CO_2} = 3,7 \cdot 10^2 \text{ t}$

27) Appliquons le premier principe industriel à l'eau chaude en écoulement stationnaire entre x et $x + dx$:

$$Q_m(h(x + dx) - h(x)) = P_{th} \rightarrow Q_m c \frac{(T(x + dx) - T(x))}{dx} = g dx (T_e - T(x)) \rightarrow \frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{Q_m c r} = \frac{T_e}{Q_m c r}$$

28) $T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\xi}\right)$

29) Négliger les échanges thermiques entre les logements revient à négliger la diffusion thermique interne aux logements. Ainsi, la puissance en provenance de l'eau chaude est intégralement refoulée vers l'atmosphère. En d'autres termes, la dépendance en x de T_i est principalement due à celle en x de T et non au flux conductif de type Fourier au sein du logement.

$$g_1(T(x) - T_i(x)) = g_2(T_i(x) - T_e) \rightarrow T_i(x) = \frac{g_1 T(x) + g_2 T_e}{g_1 + g_2} = \frac{r_2 T(x) + r_1 T_e}{r_1 + r_2}$$

30) L'équation (II. 1) devient ici $\frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{Q_m c r_1} = \frac{T_i(x)}{Q_m c r_1} \rightarrow \frac{dT_i}{dx} + \frac{T_i(x)}{Q_m c (r_1 + r_2)} = \frac{T_e}{Q_m c (r_1 + r_2)}$ (D'après ci-dessus)

On en déduit que $T_i(x) = T_e + (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{x}{\xi_{12}}\right)$ avec $\xi_{12} = Q_m c (r_1 + r_2)$ et $T_{i0} = \frac{r_2 T_0 + r_1 T_e}{r_1 + r_2}$

La condition limite est $T_e + (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{L}{\xi_{12}}\right) = T_{min} \rightarrow T_{i0} = T_e + (T_{min} - T_e) \exp\left(\frac{L}{\xi_{12}}\right) = 24 \text{ }^\circ\text{C}$

Et donc finalement, $T_{0,min} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T_{i0} - \frac{r_1}{r_2} T_e = 79,8 \text{ }^\circ\text{C}$ [La valeur $T_{i0} = 24 \text{ }^\circ\text{C}$ est confirmée figure 14]

31) Dans le modèle précédent, $T(L) = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T_{min} - \frac{r_1}{r_2} T_e = 58,4 \text{ }^\circ\text{C}$

La puissance thermique nécessaire au niveau de la chaudière est $Q_m c (T_{0,min} - T(L)) = 89,4 \text{ kW}$

Pour un autre mode de chauffage où tous les appartements seraient à la température T_{min} , l'apport thermique serait égal à la puissance perdue $g_2 L (T_{min} - T_e) = 75 \text{ kW} \rightarrow$ Le surcoût relatif s'élève à **19 %**

[Cette dernière puissance ne correspond pas à celles calculées à la question 25. Il semblerait ici qu'on ne s'intéresse pas vraiment à l'ensemble de la résidence ($g_2 L = 6,3 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1} < G = 34 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}$)]

32) En J , nous avons affaire à un mélange adiabatique d'un débit $Q_{m,1} (= Q_m - Q_{m,2})$ à la température $T(x_j^-)$ et d'un débit $Q_{m,2}$ à la température $T_{0,min}$. Si note $T(x_j^+)$ la température finale du mélange, on a

$$\Delta H = 0 \Leftrightarrow c(Q_m - Q_{m,2})(T(x_j^+) - T(x_j^-)) + cQ_{m,2}(T(x_j^+) - T_{0,min}) = 0$$

$$\Leftrightarrow T(x_j^+) = \left(1 - \frac{Q_{m,2}}{Q_m}\right) T(x_j^-) + \frac{Q_{m,2}}{Q_m} T_{0,min}$$

Avec $T(x_j^-) = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T_i(x_j) - \frac{r_1}{r_2} T_e = T_e + \frac{r_1 + r_2}{r_2} (T_{i0} - T_e) \exp\left(-\frac{x_j}{\xi_{121}}\right)$ et $\xi_{121} = (Q_m - Q_{m,2})c(r_1 + r_2)$

33) L'équipartition $Q_{m,2} = \frac{Q_m}{2}$ semble un choix pertinent car alors la moyenne des températures des logements est minimale tout en respectant la consigne concernant les logements centraux ($T_{min} = 19 \text{ }^\circ\text{C}$).

34) Il faut rechercher $T'(L)$, la nouvelle température finale de l'eau. Or d'après la figure 14, la température du logement en bout de ligne vaut $T'_i(L) = 19,2\text{ °C} \rightarrow T'(L) = \frac{r_1 + r_2}{r_2} T'_i(L) - \frac{r_1}{r_2} T_e = 59,2\text{ °C}$

La puissance au niveau de la chaudière est légèrement plus faible : $Q_m c(T_{0,min} - T'(L)) = 86,1\text{ kW}$
L'économie est de l'ordre de **4 %** ...

[Toute cette partie II.B est franchement difficile ! Je me demande si j'ai bien compris les questions ...]

35) Rappelons en premier lieu que la conductance d'un matériau de conductivité λ , de section S et d'épaisseur e a pour expression $\frac{\lambda S}{e}$. Ainsi, sa conductance par unité de surface est $U = \frac{\lambda}{e}$.

La conductance thermique calculée à la question 25 ($G = \sum U_n S_n + \psi L = 34,0\text{ kW.K}^{-1}$) doit être réduite de μG grâce à l'isolant posé sur les murs : $(1 - \mu)G = \frac{\sum U_k S_k + \psi L + U_{m,i} S_m}{16,1\text{ kW.K}^{-1}}$

Avec $U_{m,i} S_m$, la conductance de l'association mur/isolant **en série** et k , un indice excluant les murs.

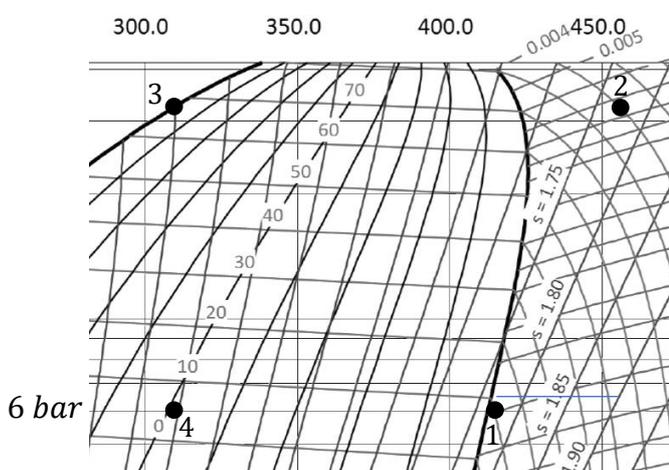
Si on note e l'épaisseur recherchée, $U_{m,i} = \frac{U_m U_i}{U_m + U_i} = \frac{3,16 * 0,037/e}{3,16 + 0,037/e} = \frac{0,117}{3,16 e + 0,037}$

En définitive, $34(1 - \mu) - 16,1 = \frac{0,661}{3,16 e + 0,037} \rightarrow e = 6,9\text{ cm}$ pour $\mu = 45\%$ \rightarrow **Une couche suffit.**

Le coût est **prohibitif** (1,4 million d'euros) pour $\mu = 48\%$ alors que $\mu_{max} = 53\%$: On arrête là les frais !

36-38) Le COP_{rev} attendu semble être l'efficacité de la machine de Carnot (adiabatiques et isothermes réversibles) qui fonctionnerait entre les mêmes températures extrêmes : $COP_{rev} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 5,4 > 1,8$

Le rendement par rapport à la machine de Carnot (maximum théorique) est de **33 %**



$$COP = \frac{|q_C|}{w_u^{comp}} = \frac{|h_3 - h_2|}{h_2 - h_1} = \frac{145}{40} = 3,6$$

Ce coefficient est surestimé vu que la compression réelle n'est pas isentropique car **irréversible**, le point 2 réel est légèrement plus à droite. La progression relative de w_u^{comp} (dénominateur) est alors supérieure à celle de $|q_C|$ (numérateur), le COP diminue.

Dans la doc, on remarque également que le COP réel dépend en fait du débit. Là encore, on retrouve l'influence néfaste de l'irréversibilité.

[On remarque sur le diagramme une rareté : les isothermes ne sont pas horizontales dans le domaine diphasé. En effet, elles ne coïncident pas avec les isobares car le fluide en question n'est pas un corps pur !]

39) Comme l'état 2 réel est mystérieux, il faut éviter ce point. On évite donc $D_m |h_3 - h_2| = 58,7\text{ kW}$ et $D_m (h_2 - h_1) = 32,6\text{ kW}$ qui donneraient deux résultats contradictoires et faux ! On exploite plutôt $D_m (h_1 - h_4) = 58,7 - 32,6 = 26,1\text{ kW} \rightarrow D_m = 0,25\text{ kg.s}^{-1} = 8,9 \cdot 10^2\text{ kg.h}^{-1}$
Comme la charge en fluide est de 11 kg , cela représente 81 cycles par heure.

40) Il faut **7** pompes à chaleur pour obtenir une puissance de chauffage totale égale à $P_C = 408\text{ kW}$

41) Du point de vue de l'émission de gaz à effet de serre il est préférable d'installer des pompes à chaleur à condition que l'électricité consommée ne soit pas produite dans des centrales à charbon ou au fuel !

Du point de vue financier, il faut comparer le prix du *MWh* de transfert thermique fourni par le gaz (90 €) et le prix du *MWh* de transfert thermique dégagé par la pompe à chaleur ($200/1,8 = 111$ €). Si on ajoute à cela le prix de l'installation, on s'aperçoit que le choix du remplacement est dicté par un engagement citoyen. Les primes et incitations fiscales sont nécessaires et d'ailleurs, quels seront les coûts de ces énergies à l'avenir ? Le prix de l'énergie est bien sûr lié au marché mais également aux décisions politiques.