

1)  $Rb : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1$  Il appartient à la famille des **alcalins** (1<sup>ère</sup> colonne)

2) Une énergie potentielle négative est compatible avec un état **lié**. De plus, la fonction  $Z(r)$  étant décroissante, on remarque ainsi que la force  $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} U = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r = \frac{q}{r} \left( \frac{dZ}{dr} - \frac{Z}{r} \right) \vec{e}_r$  est **attractive**.

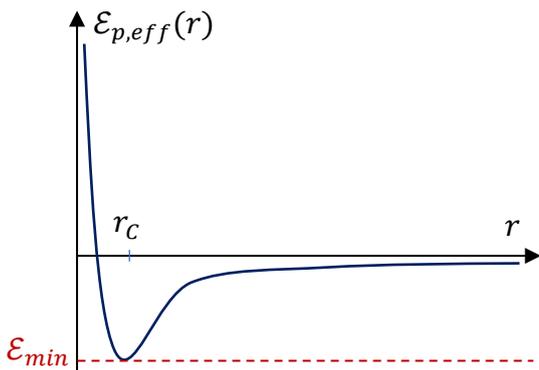
3) Quand  $r \rightarrow 0$ , **aucun électron ne fait écran**, le champ est celui du noyau entier.  
Au contraire, quand  $r \rightarrow \infty$  (!), **Z - 1 électrons font écran**, le champ est celui d'un seul proton.

4)  $[a_0] = L = (M \cdot L^2 \cdot T^{-1})^\alpha \cdot (M \cdot L^3 \cdot T^{-2})^\beta \cdot M^\gamma \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

5) Le nombre quantique étant très grand, on est dans le cas  $r \gg a_0 \rightarrow Z(r) \rightarrow 1$ .

6) On reconnaît un mouvement à force centrale, on applique le T.M.C. à l'électron :  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$   
Le vecteur  $\vec{r}$  est **perpendiculaire à un vecteur constant** dirigé suivant  $\vec{e}_z$  ( $\vec{L} = L\vec{e}_z = \vec{r} \wedge m_e \vec{v}$ ),  
le mouvement est donc dans le plan  $Oxy$  avec  $\mathcal{L} = m_e r^2 \dot{\phi}$ .

7 & 8) La seule force  $\vec{F}$  est **conservative**, l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + U$  se conserve.



$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}$$

$$\rightarrow \mathcal{E}_{min} \leq \mathcal{E}_{p,eff}(r) \leq \mathcal{E}_m$$

La seule valeur de  $\mathcal{E}_m$  permettant une solution unique au problème en  $r$  est  $\mathcal{E}_{min} : r_c = \frac{\mathcal{L}^2}{qm_e} = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2} a_0$

9 & 10)  $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\Delta\Phi(M)}{\Phi(M)} - \frac{q}{r} = i\hbar \frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)} = \text{cste} = \mathcal{E}$  car la 1<sup>ère</sup> égalité est vérifiée pour tout  $t$  et pour tout  $M$ .

On en déduit que  $\chi(t) = A \exp\left(-i \frac{\mathcal{E}t}{\hbar}\right)$ . On reconnaît en  $\mathcal{E}$  l'énergie de l'électron lié, elle est **négative**.

L'équation indépendante du temps,  $\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta\Phi(M) + \left(\mathcal{E} + \frac{q}{r}\right) \Phi(M) = 0$  confirme notre identification.

11-13)  $0 \leq l \leq n - 1$  Nous savons reconnaître l'origine énergétique de chaque terme de l'équation de Schrödinger (Cours Dynamique quantique page 2) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M,t) + V(M) \Psi(M,t)$$

$$\text{Avec } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} \rightarrow \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} & \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2} \end{matrix}$$

↓ Termes associés à  
 ... l'énergie totale      ... l'énergie cinétique      ... l'énergie potentielle

$$\mathcal{L}_{max}^2 = n(n-1)\hbar^2 \quad r_c = n(n-1)a_0$$

$$14) \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{d^2u}{d\rho^2} = \frac{q^2 m_e}{\hbar^4} \frac{d^2u}{d\rho^2} \quad (I.1) \rightarrow \frac{d^2u}{d\rho^2} + \left( -\frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} + \frac{2\hbar^2 \varepsilon}{q^2 m_e} \right) u(\rho) = 0 \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{q^2 m_e}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV} !$$

$$15) |\Phi|^2 = A^2(n) \left( \frac{r}{a_0} \right)^{2n-2} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) (\sin \theta)^{2n-2} \quad \text{Le volume élémentaire indépendant de } \varphi$$

est  $2\pi r \sin \theta r d\theta dr \rightarrow dP = 2\pi A^2(n) \frac{r^{2n}}{a_0^{2n-2}} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) dr \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n-1} d\theta$

$$16 \& 17) \frac{dP}{dr} \propto r^{2n} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) = f(r) \rightarrow f'(r) = 2n r^{2n-1} \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) \left[ 1 - \frac{r}{n^2 a_0} \right]$$

On retrouve la notion de **couche électronique** avec un rayon croissant avec  $n$ .  $r_{max}^{50} = 130 \text{ nm} !!$

18) Pour  $n = 50$ ,  $\frac{\Delta r}{r} \sim \Delta \theta \sim \frac{1}{10} \rightarrow$  L'électron est relativement "localisé", sa description se rapproche de celle d'une particule classique.

19)  $u(\rho) \propto \rho^n \exp\left(-\frac{\rho}{n}\right)$  Expression que l'on injecte dans (I.2) et qui impose deux conditions :

$$l = n - 1 \quad (l \text{ maximal}) \quad \text{Et} \quad \epsilon = \frac{1}{n^2} \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\varepsilon_0}{n^2} \quad (\text{Modèle de Bohr et formule de Rydberg})$$

$$20) \nu_{at} = \frac{\varepsilon_0}{h} \left( \frac{1}{50^2} - \frac{1}{51^2} \right) = 5,1 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \quad (\text{SHF supérieures : Radar, micro-ondes ...})$$

$$21) E_{p \rightarrow e} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim 10^{11} \text{ V.m}^{-1} \quad \text{L'électron est libre quand } E \text{ compense } E_{p \rightarrow e} : E_c \sim E_{p \rightarrow e}$$

22) Le rayon augmente avec  $n$  donc le champ  $E_c$  diminue avec  $n$ .

23)  $V_a < V_b < V_c < V_d < V_e < V_f$  Les électrons "remontent" le champ, ils sont accélérés vers  $ME$ .

24) La largeur du créneau correspond à la durée de parcours devant le diaphragme :  $v \sim 3 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$

$$25) \text{ Relions le champ } E \text{ à la différence de potentiel : } E(t) = \frac{|V_b - V_a(t)|}{d_{ab}} = \frac{|K|}{d_{ab}} (t - t_0)$$

Le potentiel  $V_a(t)$  décroît de façon à ioniser l'atome  $n = 51$  (indice 1) puis l'atome  $n = 50$  (indice 2).

$$E(b_1) = E_c^{51} = 1,48 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1} = \frac{|K|}{d_{ab}} (b_1 - t_0) \quad \text{et} \quad E(b_2) = E_c^{50} = 1,60 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1} = \frac{|K|}{d_{ab}} (b_2 - t_0)$$

$$\text{On en déduit que } \frac{b_2 - t_0}{b_1 - t_0} = \frac{1,60}{1,48} \rightarrow t_0 = 468 \mu\text{s} \quad \text{et} \quad K = -1,26 \cdot 10^6 \text{ V.s}^{-1}$$

26) Si  $V_a(t)$  est trop rapide, les ionisations s'enchainent, il n'y a plus de temps-mort, **plus de distinction**.  
Si  $V_a(t)$  est trop lente, il est possible que **seule la première** ionisation soit observée.

27) La date  $t_l$  correspond à l'intersection des gaussienne :  $t_l = 517,3 \mu\text{s}$

La vitesse initiale de l'électron pourrait influencer sa trajectoire et donc la date de son arrivée sur  $ME$ .

28) On sait que  $\underline{s}_1(z, t)$  est de la forme  $r_M S_0 \exp(i(\omega t + kz + \alpha))$ . La continuité de la phase en  $z = d$  entre  $\underline{s}_0$  et  $\underline{s}_1$  impose  $\underline{s}_1(z, t) = r_M S_0 \exp(i(\omega t + kz - 2kd)) = r_M \underline{s}_0(z, t) \exp(i(2kz - \Phi))$

29) De même en  $z = 0$ ,  $\underline{s}_2(z, t) = r_M^2 S_0 \exp(i(\omega t - kz - 2kd)) = r_M^2 \underline{s}_0(z, t) \exp(-i\Phi)$

et de nouveau en  $z = d$ ,  $\underline{s}_3(z, t) = r_M^3 S_0 \exp(i(\omega t + kz - 4kd)) = r_M^2 \underline{s}_1(z, t) \exp(-i\Phi)$

$$30 \& 31) \underline{s}_+ = \underline{s}_0(z, t) \frac{1}{1 - r_M^2 \exp(-i\Phi)} \quad \underline{s}_- = \underline{s}_1(z, t) \frac{1}{1 - r_M^2 \exp(-i\Phi)} \quad \mathbf{v}_{cav} = \frac{pc}{2d} \quad (p \in \mathbb{N}^*)$$

$$32) \sin^2 \frac{\delta\Phi}{4} = \frac{1}{M} \ll 1 \rightarrow \delta\Phi = \frac{4}{\sqrt{M}} \rightarrow \delta\mathbf{v} = \frac{c}{\pi d \sqrt{M}}$$

**33)** La durée d'un paquet d'ondes est  $\tau = \frac{1}{\delta\nu} = \frac{2\pi d}{c(1-R)}\sqrt{R} \sim \frac{2\pi d}{c(1-R)}$

**34 & 35)** La durée de vie moyenne est la somme des durées de vie multipliées par leur probabilité :

$\langle x \rangle = \sum P_i x_i$  (La fameuse formule qui vous échappe souvent !)

$$\tau = \frac{d}{c}T + \frac{2d}{c}RT + \frac{3d}{c}R^2T + \dots = \frac{d}{c}T \frac{d}{dR} (R + R^2 + \dots) = \frac{d}{c}T \frac{d}{dR} \left( \frac{R}{1-R} \right) = \frac{d}{c(1-R)} \rightarrow 1 - R = 8,9 \cdot 10^{-10}$$

**36)** On fait appel à la distance de pénétration  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \rightarrow 0$  si  $\gamma \rightarrow \infty$  : La vie du photon est prolongée.

**37)** Première résolution en considérant le problème à une dimension (~ fente) : Au niveau du miroir de gauche, la tache centrale de diffraction déborde de chaque côté de la distance  $\frac{\lambda_0 d}{2a}$  ( $\theta \sim \sin \theta = \frac{\lambda_0}{2a}$ ).

On poursuit en considérant que toute l'énergie est contenue dans cette tache.

Le rapport "intensité reçue/intensité initiale" vaut donc approximativement  $\frac{2a}{2a + \lambda_0 \frac{d}{a}} \sim 1 - \frac{\lambda_0 d}{2a^2} = 88 \%$

On cherche le nombre de réflexions  $n$  tel que  $0,88^n = 10^{-3} \rightarrow n = \frac{-3}{\log 0,88} = 54$

Au bout de réflexions environ, le rapport des intensités vaudra 1/1000 :  $\tau_{diff} \sim 54 \frac{d}{c} \sim 5 \text{ ns}$  !

Deuxième résolution en considérant le problème à deux dimensions (~ trou) :

La tache centrale de la figure d'Airy déborde tout autour du miroir de  $\frac{1,22\lambda_0 d}{2a}$ .

Le rapport "intensité reçue/intensité initiale" vaut donc approximativement  $\frac{(2a)^2}{(2a + 1,22\lambda_0 \frac{d}{a})^2} \sim 75 \%$

$\rightarrow n = \frac{-3}{\log 0,75} = 24 \rightarrow \tau_{diff} \sim 2 \text{ ns}$  La conclusion est la même.

La diffraction est gênante car la longueur d'onde est bien plus grande qu'en optique ( $\lambda_0 = 5,87 \text{ mm}$ ).

Il faut absolument régler ce problème par des miroirs sphériques.

**38-40)**  $\omega_0 = 6,0 \text{ mm}$  S'il y a  $p$  ventres, cela signifie qu'il y a  $p + 1$  nœuds, or  $|\Phi|$  varie de  $\pi$  entre chaque nœud :  $|\Phi|$  varie de  $p\pi$  entre les deux miroirs et donc varie de  $p \frac{\pi}{2}$  entre  $z = 0$  et  $z = d'/2$ .

$$p = \frac{2d'}{\lambda_0} - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\lambda_0 d'}{2\pi\omega_0^2} \right) = 9$$

La longueur d'un fuseau est  $\frac{d'}{9} \sim 3,1 \text{ mm} > 0,7 \text{ mm} \rightarrow$  Tous les atomes arrivent sur le ventre central.

**41)** La loi aux mailles donne 2 équations identiques :  $\frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{i_{cav}}{LC_{cav}} = 0 \rightarrow \omega_{cav} = \sqrt{\frac{1}{LC_{cav}}}$  et  $\omega_{at} = \sqrt{\frac{1}{LC_{at}}}$

**42)** Dans l'atome, l'électron accéléré perd de l'énergie par **rayonnement**. Ce phénomène est négligé. [Pour en tenir compte, une force supplémentaire de freinage est introduite dans le modèle de Thomson. Voir le sujet CCINP ph 2019]

Dans la cavité, l'onde est **partiellement absorbée** à chaque réflexion. Ici, les réflexions sont totales.

**43)** La loi aux mailles donne 2 équations :  $\frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{i_{cav}}{LC_{cav}} = 0$  et  $\frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{i_{at}}{LC_{at}} = 0$

On identifie  $\Omega = \frac{M}{L} \omega_0$  et  $\varepsilon = \delta \omega_0$

44) On obtient le système 
$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \varepsilon - \omega^2)L_{c0} - \omega^2 \frac{\Omega}{\omega_0} L_{a0} = 0 \\ -\omega^2 \frac{\Omega}{\omega_0} L_{c0} + (\omega_0^2 + \varepsilon - \omega^2)L_{a0} = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène n'a de solutions **non nulles que si son déterminant est nul**. [Cette démarche a déjà été effectuée dans l'exercice 2 du TD Dynamique quantique et dans la partie 2 du TP Oscillateurs couplés]

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) \omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 - \varepsilon^2 + \omega_0^4 = 0$$

45-47)  $\omega_- = \omega_{cav} - \frac{\Omega^2}{4\delta}$        $\omega_+ = \omega_{at} + \frac{\Omega^2}{4\delta}$        $\hbar\omega'_{at} = \hbar\omega_+ = \hbar\left(\omega_{at} + \frac{\Omega^2}{4\delta}\right) \rightarrow \Delta\omega_{at}^{(0ph)} = \frac{\Omega^2}{4\delta}$

