CCS 1 2017

I.A) $\Phi_{S_g}(\vec{G}) = \oiint \vec{G}.d\vec{S}_{ext} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$ La distribution est invariante par rotation suivant $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.

Tous les plans contenant $\overrightarrow{OM}$ sont des plans de symétrie pour la distribution donc $\vec{G}(M) = G(r)\vec{e}_r$

$\vec{G}(r \le R_T) = -\frac{\mathcal{G}M_T r}{R_T^3}\vec{e}_r \qquad \vec{G}(r \ge R_T) = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2}\vec{e}_r \qquad M_T = \frac{gR_T^2}{\mathcal{G}} = \boldsymbol{5,97.10^{24}\ kg}$

I.B.1) Soit l'altitude $h \ll R_T$, $G(R_T + h) \sim g\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$

A 39 km d'altitude, l'écart de pesanteur est de 1,2 % : On néglige cette variation dans tout ce qui suit.

On applique le théorème de l'énergie cinétique : $h_{min}^{sans\ frot} = \frac{v_{son}^2}{2g} = \boldsymbol{5,89\ km}$

I.B.2) La deuxième loi de Newton nous indique que $m\frac{dv}{dt} = mg - KA\rho(h)v^2(t)$

La vitesse terminale est une vitesse limite atteinte "près" du sol : $KA\rho_0 v_{lim}^2 = mg \ \rightarrow\ KA = \frac{mg}{\rho_0 v_{lim}^2}$

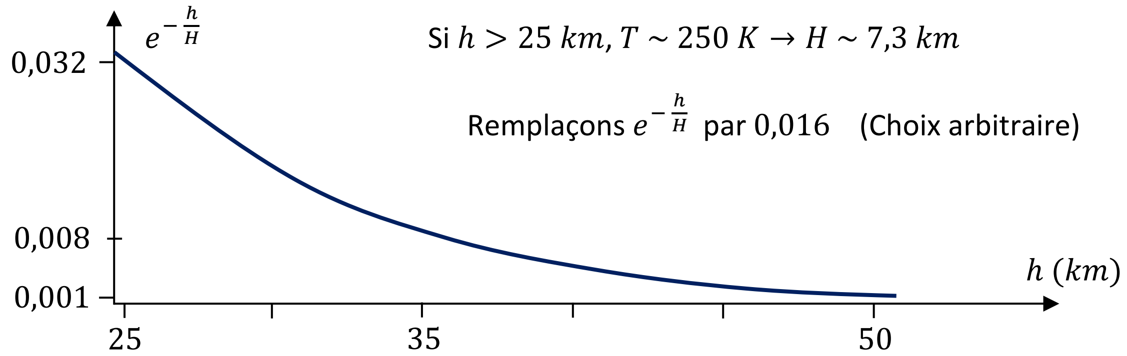
On prend $m = 1{,}0.10^2\ kg$ et $\rho_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0} = 1{,}2\ kg.m^{-3}$ D'où $\boldsymbol{KA \sim 0,13\ m^2}$

La vitesse maximale est atteinte à l'altitude h_{son} quand l'accélération s'annule avant de devenir négative

$h_{son} = \frac{RT}{M_a g}\ln\left(\frac{KA\rho_0 v_{son}^2}{mg}\right) = \boldsymbol{25\ km}$ L'altitude de départ est donc forcément **supérieure à 31 km**.

Soyons un peu plus précis, posons $H = \frac{RT}{M_a g}$ et surtout $\boldsymbol{u(h) = v^2} \ \rightarrow\ u' = 2v\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dh} = -2\frac{dv}{dt}$

La loi de Newton devient $u' - \frac{2KA\rho_0}{m}e^{-\frac{h}{H}}u(h) = -2g$ Traçons $e^{-\frac{h}{H}}$ pour 25 $km < h <$ 50 km :



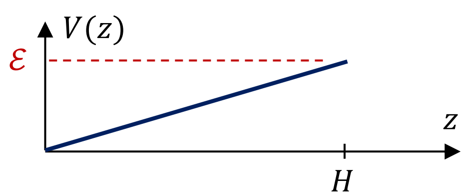
L'équation approchée est $u' - 5{,}0.10^{-5}u = -20$ Elle admet pour solution $u(h) = Ce^{5,0.10^{-5}h} + 4{,}0.10^5$

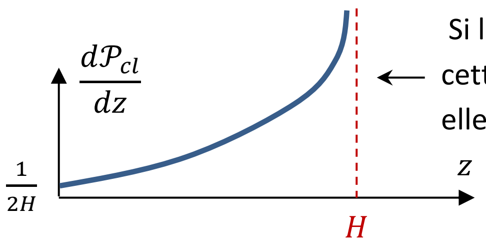
avec $C = (v_{son}^2 - 4{,}0.10^5)e^{-5,0.10^{-5}h_{son}} = -8{,}1.10^4\ m^2.s^{-2}$

Enfin, on trouve l'altitude initiale h_0 correspondant à $u = 0 \ \rightarrow h_0 = \boldsymbol{32\ km}$ (Même ordre de grandeur)

Le fait de considérer la masse volumique constante est inévitable mais pénalise la résolution. Il faudrait une aide numérique pour pouvoir intégrer l'équation différentielle. Toutefois, la loi de pression isotherme est discutable jusqu'à ces altitudes, je pense que c'est le point faible du modèle.

II.A.1) $V(z) = \boldsymbol{mgz}$ Le système est **conservatif**, l'énergie mécanique **se conserve**.





Si la particule atteint
cette altitude,
elle y reste longtemps !

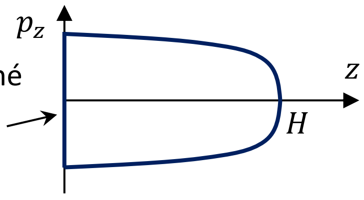
II.A.2 & 3) $\mathcal{E}_c = \boldsymbol{mg(H - z)} \quad (0 < z < H) \qquad d\mathcal{P}_{cl} \propto dt = \frac{dt}{dz}dz = \frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\frac{d\mathcal{P}_{cl}}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{H(H-z)}}}$

II.A.4 & 5) $dim(l_g) = \{([M][L]^2[T]^{-1})^2([L][T]^{-2}[M]^2)^{-1}\}^{\frac{1}{3}} = [\boldsymbol{L}]$ $\quad \varepsilon_g = \boldsymbol{mgl_g}$

II.A.6 & 7) $l_g = \boldsymbol{5,86\ \mu m}$ $\quad \varepsilon_g = \boldsymbol{6,00.10^{-13}\ eV}$ Les neutrons **ultra froids** sont les mieux adaptés car leur énergie est la plus basse mais le quantum ε_g demeure toutefois cent mille fois plus faible …

II.B) L'orbite de phase pour un neutron dans $\vec{g}$ est constituée d'une branche de parabole (renversée).

Le caractère fermé nous oblige à boucler par ici !



$$\frac{p_z^2}{2m} + mgz = mgH$$

$$S = 2\int_0^H |p_z(z)|dz = 2\int_0^H \sqrt{2gm^2(H-z)}dz$$
$$= -\frac{4}{3}\sqrt{2gm^2}\left[(H-z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^H = \frac{4}{3}\sqrt{2m^2g}\,H^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{nh}$$
$$\to H_n = \left(\frac{3}{4}n\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{h^2}{2m^2g}\right)^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{n^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} l_g}$$

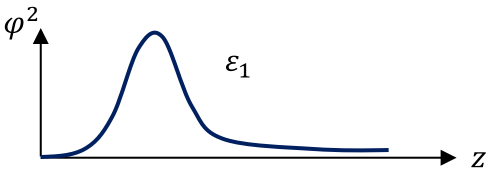
L'énergie d'un neutron dans le champ de pesanteur est quantifiée selon $\mathcal{E}_n = mgH_n = \boldsymbol{n^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\varepsilon_g}$

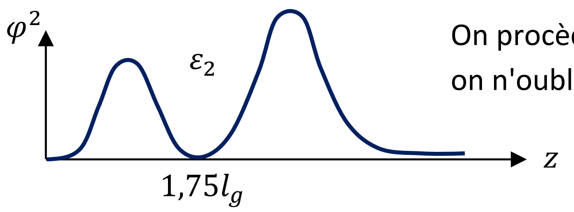
II.C.1) Un état stationnaire d'énergie $\mathcal{E}$ est décrit par une fonction d'onde du type $\psi(z,t) = \varphi(z)e^{-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}$
La densité de probabilité de présence associée est **indépendante du temps**.

II.C.2) $\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E} - mgz)\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{l_g^2}\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E} - \varepsilon_g\zeta)\varphi(\zeta) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + (\varepsilon - \zeta)\,\varphi(\zeta) = 0}$

II.C.3) $\boldsymbol{\varphi(0) = 0}$ Et $\boldsymbol{\lim_{\infty}\varphi(\zeta) = 0}$

II.C.4 & 5) $\mathrm{Ai}(-\varepsilon) = 0 \to \varepsilon_1 = \boldsymbol{2,34}\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{2,81}\right)$ et $\varepsilon_2 = \boldsymbol{4,09}\left(\left(2\,\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{4,46}\right)$





On procède par translation et on n'oublie pas d'élever au carré !

Contrairement au cas classique, la densité n'évolue pas de façon monotone (Interférences quantiques).

II.D.1) Il décrit une onde **progressive** se propageant vers les $\boldsymbol{x}$ **croissants**. On reporte $\psi_I(x,z,t)$ dans l'équation de Schrödinger : $i\hbar\left(-i\omega - i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}\right)\varphi_I(z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-k^2\varphi_I(z) + \varphi_I''(z)\right) + V(z)\varphi_I(z) \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{\varphi_I''(z) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E} - V(z))\varphi_I(z) = 0}$$

Si $V(z) = 0$, on reconnait la situation du puits infini : $\boldsymbol{\varphi_I(z) = A\sin\left(\frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_{\infty,n}}}{\hbar}z\right)}$ avec $\boldsymbol{\mathcal{E}_{\infty,n} = \frac{n^2h^2}{8mH^2}}$

En échelle logarithmique, la pente est $\boldsymbol{-2}$. Cela signifie que $\mathcal{E}_1$ est proportionnelle à $\boldsymbol{H^{-2}}$ tant que H est suffisamment petit (on retrouve les niveaux du puits infini **sans gravité**).

Au contraire, si H est suffisamment grand on reconnait la valeur $\boldsymbol{\varepsilon_1 = 2,34}$ obtenue en II.C avec la gravité.

$\frac{H}{l_g} \sim 4{,}4 \to \boldsymbol{\varepsilon_1 \sim 2,4}$

II.D.2) $\boldsymbol{\frac{L_n}{2v_x}}$ est la durée τ d'une chute de hauteur H_n à partir d'une vitesse verticale nulle $\left(\boldsymbol{H_n = \frac{1}{2}g\tau^2}\right)$

A priori, seuls les **deux premiers** niveaux $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ permettent aux neutrons de traverser le guide.

Lorsqu'un quanton d'énergie $\mathcal{E}$ **franchit une barrière** où l'énergie potentielle **est supérieure à $\mathcal{E}$**, on parle d'effet tunnel. L'émission d'une particule alpha par un noyau radioactif en est un exemple.

$$\boldsymbol{T_1 = 2,65.10^{-3}} \qquad \boldsymbol{P_{p+1} = (1-T_1)P_p \;\rightarrow\; P_p = (1-T_1)^p \;\rightarrow\; P(x) = (1-T_1)^{x/L_1} \sim 1 - \frac{x}{D_1}}$$

$\boldsymbol{D_1 = 8,11\,m}$ C'est très supérieur à la longueur du guide, les neutrons d'énergie $\mathcal{E}_1$ traverseront le guide majoritairement, contrairement à ceux d'énergie $\mathcal{E}_2$ pour lesquels D_2 est trop petite (**Filtrage**).

II.D.3) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne **non uniforme** par rapport au référentiel terrestre, il n'est donc pas galiléen. $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -ma(t)\,\vec{e}_z = -\frac{dV_{ie}}{dz}\,\vec{e}_z \;\rightarrow\; V_{ie} = \boldsymbol{ma(t)z}$

On reporte $\varphi_{II}(z,t)$ dans l'équation de Schrödinger unidimensionnelle en sachant que les fonctions φ_{1-3} vérifient l'équation $\frac{d^2\varphi_{1-3}}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E}_{1-3} - mgz)\varphi_{1-3} = 0$:

$$i\hbar\frac{dc_1}{dt}e^{-i\frac{\mathcal{E}_1 t}{\hbar}}\varphi_1 + i\hbar\frac{dc_3}{dt}e^{-i\frac{\mathcal{E}_3 t}{\hbar}}\varphi_3 = ma(t)z\left(c_1 e^{-i\frac{\mathcal{E}_1 t}{\hbar}}\varphi_1 + c_3 e^{-i\frac{\mathcal{E}_3 t}{\hbar}}\varphi_3\right) \Leftrightarrow$$

$$i\hbar\frac{dc_1}{dt}\varphi_1^2(z) + i\hbar\frac{dc_3}{dt}e^{-i\Omega_R t}\varphi_1(z)\varphi_3(z) = ma(t)z\left[c_1\varphi_1^2(z) + c_3 e^{-i\Omega_R t}\varphi_1(z)\varphi_3(z)\right] \Rightarrow$$

$\boldsymbol{i\hbar\frac{dc_1}{dt} = ma(t)[Z_{11}c_1 + Z_{13}c_3 e^{-i\Omega_R t}]}$ (Par intégration entre $z = 0$ et $z \rightarrow \infty$)

Symétriquement, $i\hbar\frac{dc_3}{dt}\varphi_3^2(z) + i\hbar\frac{dc_1}{dt}e^{i\Omega_R t}\varphi_1(z)\varphi_3(z) = ma(t)z\left[c_3\varphi_3^2(z) + c_1 e^{i\Omega_R t}\varphi_1(z)\varphi_3(z)\right] \Rightarrow$

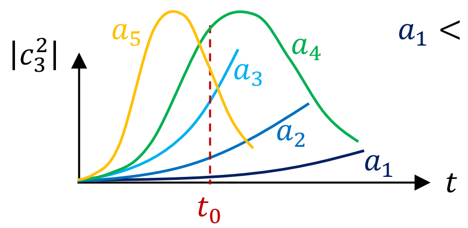
$\boldsymbol{i\hbar\frac{dc_3}{dt} = ma(t)[Z_{33}c_3 + Z_{13}c_1 e^{i\Omega_R t}]}$

On a vu que **seuls les neutrons d'énergie $\mathcal{E}_1$ sont capables** de traverser le guide $\rightarrow c_1(0) = 1$ et $c_3(0) = 0$

Si $a(t) = 0$, **les conditions initiales persistent**, les neutrons d'énergie $\mathcal{E}_1$ demeurent seuls.

La mise en oscillation du miroir permet aux neutrons d'**accéder au niveau énergétique $\mathcal{E}_3$** .
Si $\Omega = \Omega_R$, le phénomène est **maximal**, $|c_3^2|$ atteint la valeur 1.

Aucun neutron d'énergie $\mathcal{E}_3$ ne parvient à sortir du guide, il en découle un déficit de neutrons en sortie.
Lorsque a augmente, la courbe représentant $|c_3^2|$ se déplace vers la gauche en se contractant.



$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$

Pour une date t_0 fixée, correspondant au temps de trajet d'un neutron au-dessus du miroir, la valeur de $|c_3^2|$ augmente puis diminue lorsque a augmente.

La chute du taux entre 600 Hz et 700 Hz est vraisemblablement liée à une **transition $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_4$** .

$\Omega_R = \frac{(\varepsilon_3-\varepsilon_1)mgl_g}{\hbar} \rightarrow \boldsymbol{g = \sqrt{\frac{8\pi^2 h f_R^3}{m(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^3}} = 9,86\,m.s^{-2}} \quad \boldsymbol{u(g) = \frac{3u(f_R)}{2f_R}g = 0,03\,m.s^{-2}}$

L'amplitude est $\frac{a_0}{4\pi^2 f_R^2} = \boldsymbol{0,718\,\mu m}$ C'est faible, cela nécessite un mécanisme de haute précision.

La relation d'indétermination d'Heisenberg temporelle (hors programme) nous indique que le produit de l'indétermination-type sur l'énergie $\Delta\mathcal{E}$ par la durée nécessaire à la mesure τ est supérieur ou égal à $\hbar/2$.
Or $f_R = \frac{\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_1}{h} \rightarrow \Delta f_R = \sqrt{2}\frac{\Delta\mathcal{E}}{h} \sim 40\,Hz$ d'après la figure 9 Ainsi $\tau \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi\Delta f_R} \sim \boldsymbol{3\,ms}$ En effet $\frac{d}{v_x} = 31\,ms$