

I.A.1) Les collisions entre les particules en provenance de l'espace et les atomes ou molécules de la haute atmosphère excitent ces derniers. Lors de leur désexcitation, un rayonnement est émis dans le visible.

Une énergie de l'ordre du keV est largement suffisante. En effet, le visible nécessite $\Delta\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda_{visible}} \sim 2 eV$

I.A.2) Les particules chargées sont attirées vers les zones de champ magnétique fort, au-dessus des pôles.

I.A.3) Près de la Terre, on reconnaît le champ d'un dipôle dont les caractéristiques essentielles sont

$$\{B_r = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{2\pi r^3}; B_\theta = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}; \text{ Lignes de champ fermées d'équation } r = r_0 \sin^2 \theta\}.$$

Le vent solaire "comprime" les lignes côté Soleil (choc) et au contraire les "étire" dans la direction opposée.

I.B.1) La force gravitationnelle a pour expression $\frac{mgR_T^2}{r^2}$. A 400 km d'altitude, elle vaut moins de $10^{-29} N$.

Le champ magnétique décroît en $\frac{1}{r^3}$ ($B \sim 4 \cdot 10^{-5} T$), la vitesse est évaluée à $2 \cdot 10^7 m \cdot s^{-1}$ ($v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}}$)

L'ordre de grandeur de la force magnétique est $10^{-16} N \rightarrow$ L'attraction gravitationnelle est négligeable.

I.B.2) La force magnétique est nulle, l'électron se déplace **uniformément le long d'une ligne** de champ.

I.B.3) On applique la deuxième loi de Newton à l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$ ($\vec{\omega}_c = \frac{e\vec{B}}{m}$)

On reconnaît une rotation de pulsation $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$

Le rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire s'obtient en écrivant le P.F.D. au satellite :

$$R\omega^2 = \frac{gR_T^2}{R^2} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{gR_T^2}{\omega^2}} = 4,2 \cdot 10^7 m \rightarrow B_0 \sim 2 \cdot 10^{-7} T \rightarrow \omega_c = 3 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

La projection de $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$ sur \vec{e}_x et \vec{e}_y donne le système $\ddot{x} + \frac{eB_0}{m}\dot{y} = 0$ et $\ddot{y} - \frac{eB_0}{m}\dot{x} = 0$

On pose $\underline{u} = x + iy$, le système se résume à $\ddot{\underline{u}} - i\omega_c \dot{\underline{u}} = 0 \rightarrow \dot{\underline{u}} - i\omega_c \underline{u} = v_{0x} \rightarrow \underline{u} = i \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - e^{i\omega_c t})$

$$\rightarrow x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \text{ et } y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \rightarrow R_c = \frac{v_{0x}}{\omega_c} = \frac{mv_{0x}}{eB_0} \sim 7 \cdot 10^2 m$$

I.B.4) $[\mathcal{P}] = [F]LT^{-1} = \left[\frac{1}{\epsilon_0}\right] Q^\alpha L^{\beta+2} T^{-\beta-4} = ([F]Q^{-2}L^2)Q^\alpha L^{\beta+2} T^{-\beta-4} \rightarrow \alpha = 2 \text{ et } \beta = -3$

La vitesse et l'accélération de l'électron valent respectivement $R_c\omega_c$ et $R_c\omega_c^2$, on en déduit que

$$d\mathcal{E}_c = m\omega_c^2 R_c dR_c = -\mathcal{P} dt = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (R_c\omega_c^2)^2 dt \Leftrightarrow \frac{dR_c}{R_c} = -\frac{e^2\omega_c^2}{6\pi m\epsilon_0 c^3} dt \Leftrightarrow R_c = R_{c0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{Avec } \tau = \frac{6\pi m\epsilon_0 c^3}{e^2\omega_c^2} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3} \sim 2 \cdot 10^{14} s$$

Ce temps est prodigieusement grand, **nous n'observons pas** de variation du rayon.

I.B.5) L'électron décrit une trajectoire **hélicoïdale** de rayon R_c autour d'une ligne de champ.

I.C.1) $\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{dB_z}{dz} = 0 \Leftrightarrow B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$ ($B_r(0, z) = 0$ par symétrie cylindrique)

I.C.2) Il faut comprendre "petite perturbation" ! $|B_r| \ll |B_z| \Leftrightarrow \frac{r}{2} \left| \frac{dB_z}{dz} \right| \ll |B_z| \Leftrightarrow \frac{r}{2L} \ll 1$

I.C.3) On reconnaît localement la situation du I.B.5 : $\mathbf{R}(\mathbf{z}) = \frac{mv_\theta}{eB_z(z)}$

I.C.4) L'électron tourne dans le sens trigonométrique autour de \vec{e}_z , le courant I tourne dans le sens horaire : $\vec{\mathcal{M}} \sim -I\pi R^2(z) \vec{e}_z = -\frac{e}{T}\pi R^2(z) \vec{e}_z \sim -\frac{eR(z)v_\theta}{2} \vec{e}_z \sim -\frac{e}{2m} \vec{\mathcal{L}}$ ($\vec{\mathcal{L}} \sim mR(z)v_\theta \vec{e}_z$)

I.C.5) $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \rightarrow \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \sim \frac{e\vec{B}}{2m} \wedge \vec{\mathcal{M}}$ Le moment magnétique n'étant pas tout à fait aligné avec \vec{B} ,

il en découle une précession autour de \vec{e}_z car $\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \cdot \vec{e}_z \sim 0 \rightarrow \mathcal{M}_z \sim \text{cste}$

L'électron s'enroule autour des lignes de champ tout en s'approchant de l'axe Oz et en se dirigeant vers la zone de champ fort (z croissant). Nous allons voir par la suite que l'électron rebrousse chemin ...

I.C.6) La force magnétique ne travaille pas, l'énergie cinétique se conserve :

$$v_x^2(z) + v_y^2(z) + v_z^2(z) = v_{0x}^2 + v_{0z}^2$$

La conservation de $\mathcal{M}_z = -\frac{m(v_x^2(z) + v_y^2(z))}{2B_0(1 + \frac{z^2}{L^2})}$ implique également $\frac{1}{2}m(v_x^2(z) + v_y^2(z)) = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right)$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m(v_{0x}^2 + v_{0z}^2 - v_z^2(z)) = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_z^2(z) + \frac{1}{2}mv_{0x}^2 \frac{z^2}{L^2} = \frac{1}{2}mv_{0z}^2$$

On reconnaît l'intégrale première d'un mouvement du type oscillatoire : $|z| \leq z_{\max} = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} L$ et $\omega_m = \frac{v_{0x}}{L}$

En considérant L de l'ordre d'une dizaine de milliers de kilomètres, $\omega_m \sim 2 \text{ rad. s}^{-1} \rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_m} \sim 3 \text{ s}$

I.C.7) Les électrons rebrousse chemin au-dessus des pôles, là où la vitesse ortho radiale $v_x^2(z) + v_y^2(z)$ et le champ B sont maximaux. Il en est de même pour $\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\| \rightarrow$ La puissance rayonnée y est maximale.

$\omega_c = \frac{eB}{m} \sim 9.10^6 \text{ rad. s}^{-1} \rightarrow \lambda \sim 2.10^2 \text{ m}$ Onde radio incapable de traverser l'ionosphère (Plasma)

I.D) A ces énergies, les électrons sont **relativistes**. L'étude précédente ne s'applique pas à ces électrons.

II.A.1)

a) Le pendule élastique horizontal (l'élongation x est confinée) est le siège d'échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cste} \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Le circuit LC (la charge q du condensateur est confinée) est le siège d'échange entre l'énergie magnétique et l'énergie électrique : $\frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2C}q^2 = \text{cste} \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

$$\text{b) } i\hbar \frac{\partial \Psi_{1D}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \Psi_{1D} + V(x) \Psi_{1D}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \Psi_{1D}}{\partial x^2} + V(x) \Psi_{1D}(x, t)$$

Avec $d\mathcal{P} = |\Psi_{1D}(x, t)|^2 dx$, la probabilité de présence de l'électron en x à dx près.

$$\text{c) } \frac{i\hbar}{g(t)} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\varphi(x)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x) \varphi(x) \right) = \text{cste} = \mathcal{E} \text{ (Energie de la particule reconnue par analyse}$$

dimensionnelle, en s'inspirant de l'écriture d'une O.P.P.H. à partir des relations de De Broglie)

$\rightarrow g(t) = \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$ Ainsi, $|\Psi_{1D}(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2 = \frac{d\mathcal{P}}{dx}$ est indépendant du temps.

d) Le mot confinement semble plutôt indiquer que **les états sont liés** ! La forme parabolique du potentiel rend inévitable l'inégalité $V(x) > \mathcal{E}$ dès que l'on s'écarte trop de $x = 0$. L'expression de \mathcal{E} donnée plus loin (quantifiée) confirme cela. Les fonctions d'onde associées sont **normalisables** ($\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$).

Attention, le domaine d'intégration est \mathbb{R} , malgré le confinement !

[Il me semble que cette question vient un peu trop tôt. Autre petit souci, la fonction $\varphi_0(x)$ est mal normalisée ! Il y a un 2 en trop sous la puissance $\frac{1}{4}$... Peut-être n'existe-t-elle pas seule ?]

e) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi_0(x)|^2 dx = 0$

On confronte $|\varphi_0(x)|^2$ et la fonction $f(x)$ du formulaire afin d'identifier $\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m^*}} = 3,0 \text{ nm}$

f) $\mathcal{E} = \langle \mathcal{E} \rangle = \langle \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 \rangle = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega^2 (\Delta x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{8m^*(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m^* \omega^2 (\Delta x)^2 = \frac{\hbar\omega}{2} = \mathcal{E}_0$

En mécanique classique, Δp_x et Δx peuvent être simultanément nuls (équilibre). Ceci est impossible en quantique d'après la relation de Walter White, le confinement impose à \mathcal{E} une valeur strictement positive.

g) Dorénavant, le laplacien de $\Psi_{2D}(x, y, t)$ s'écrit $\frac{\partial^2 \Psi_{2D}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{2D}}{\partial y^2}$. Après division par $\varphi(x)\chi(y)$

on obtient l'équation indépendante du temps $\left[\frac{\hbar^2}{2m^* \varphi(x)} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - V(x) \right] + \left[\frac{\hbar^2}{2m^* \chi(y)} \frac{d^2 \chi}{dy^2} + \mathcal{E} - V(y) \right] = 0$

Chaque crochet valant deux constantes opposées, on reconnaît deux équations du problème à une

dimension : $\frac{\hbar^2}{2m^* \varphi(x)} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - V(x) = -\mathcal{E}_x$ et $\frac{\hbar^2}{2m^* \chi(y)} \frac{d^2 \chi}{dy^2} + \mathcal{E} - V(y) = \mathcal{E}_x \Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m^* \chi(y)} \frac{d^2 \chi}{dy^2} - V(y) = -\mathcal{E}_y$

En définitive, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n_x+n_y} = 2\mathcal{E}_0 + (n_x + n_y)\hbar\omega = (\mathbf{1} + n_x + n_y)\hbar\omega$

h) Si on note $n = n_x + n_y$, la dégénérescence du niveau énergétique \mathcal{E}_n est $n + 1$: $g_{2D}^n = n + 1$

II.A.2)

a) **La cavité laser** (filtre interférentiel) est un dispositif permettant d'émettre des raies lumineuses extrêmement fines dans le domaine optique (450 nm ; 750 nm).

b) Comme en chimie avec la loi de Beer-Lambert, une onde dont on fait varier la pulsation ω est envoyée à travers la boîte et l'on mesure l'intensité du signal transmis. Apparaissent alors des minimums correspondant à des maximums d'absorption pour lesquels $\hbar\omega = \mathcal{E}_{n'} - \mathcal{E}_n$.

c) $B_s < \frac{\omega m^*}{e\sqrt{2}} = 26 \text{ T}$ Cette valeur limite est grande, la condition est peu contraignante.

d) A cette température, $kT \ll \hbar\Omega$: **Le système est gelé** au niveau énergétique \mathcal{E}'_0 .

e) Les séries de points devraient correspondre à $f_+ = \frac{\mathcal{E}_+ - \mathcal{E}'_0}{h} = \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{eB_s}{4\pi m^*}$ et $f_- = \frac{\mathcal{E}_- - \mathcal{E}'_0}{h} = \frac{\Omega}{2\pi} - \frac{eB_s}{4\pi m^*}$

Ce sont à peu près deux équations de droite car Ω varie très peu : $\omega < \Omega < \sqrt{\frac{9}{8}} \omega$

L'accord semble bon à partir de $B_s = 1,3 \text{ T}$

Les pentes mesurées sont de l'ordre de $\pm \frac{1,6 \cdot 10^{12}}{7,9} = \pm 0,20 \text{ THz} \cdot \text{T}^{-1} = \pm \frac{e}{4\pi m^*}$ L'accord est parfait !

II.A.3) L'anisotropie explique pourquoi les ordonnées à l'origine diffèrent : Il existe en fait deux valeurs différentes de ω , $\omega_x = \omega\sqrt{1+\epsilon}$ et $\omega_y = \omega\sqrt{1-\epsilon}$. Ainsi, deux ordonnées à l'origine différentes apparaissent, f_x et f_y dont on mesure la différence $f_x - f_y = 1,6 \text{ THz} = \frac{\omega_x - \omega_y}{2\pi} \sim \frac{\omega\epsilon}{2\pi} \rightarrow \epsilon \sim \mathbf{0,11}$

II.A.4)

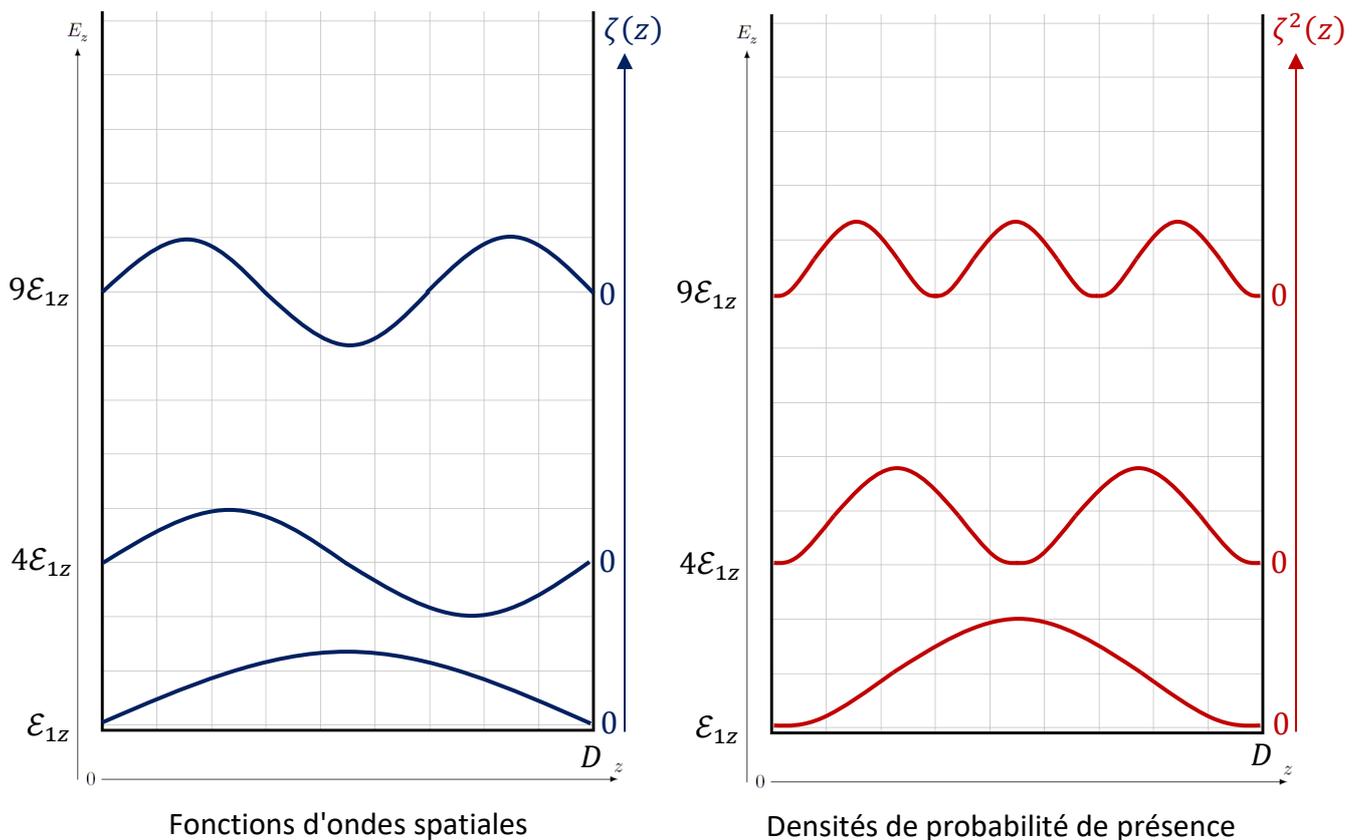
a) On note $\zeta(z)$ la partie spatiale de la fonction d'onde dépendante de z ($V = 0$ si $0 < z < D$) :

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E}_z \zeta(z) = 0 \rightarrow \zeta(z) \propto \sin(kz) \text{ avec } k = \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} \mathcal{E}_{n_z}} = \frac{n_z\pi}{D} \rightarrow \mathcal{E}_{n_z} = \frac{n_z^2\hbar^2}{8D^2m^*} \quad (n_z \in \mathbb{N}^*)$$

b & c) Il faut que les différences de niveaux énergétiques suivant x et y soient beaucoup plus petits que ceux concernant z : $D \ll \sqrt{\frac{\hbar^2}{\omega m^*}}$ L'échelle verticale est **dilatée**.

d) La normalisation impose $\zeta(z) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin(kz)$, ainsi $\int_0^D \zeta^2(z) dz = 1$

e-g) La quantification du **vecteur d'onde est identique** mais l'énergie de la corde **n'est pas quantifiée**. Il existe un phénomène de **dispersion en quantique** ($\frac{\mathcal{E}}{p} \neq cste$) qui est absent dans le modèle de Melde.



On retrouve à gauche l'analogie avec la corde de Melde. Il existe des points (nœuds) où la probabilité de présence est nulle. L'énergie minimale n'est pas nulle, l'électron **ne peut pas être à une altitude constante**.

Pour les énergies élevées (système méso-macroscopique), la distance entre un nœud et un ventre tend vers 0. La densité de présence suivant z devient **uniforme** à l'échelle de l'objet.

II.B.1) On reconnaît l'exercice 6 de thermo statistique : $p_n = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right)}{\sum_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_0(1+2j)}{k_B T}\right)} = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right)$

II.B.2) $r = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$ Si $T \ll \frac{\hbar\omega}{k_B} = 7,0 \cdot 10^2 \text{ K}$, le système est gelé dans son état fondamental.

Si $T \gg \frac{\hbar\omega}{k_B} = 7,0 \cdot 10^2 \text{ K}$, les états sont équiprobables.

II.B.3) $\langle \mathcal{E} \rangle = 2 \varepsilon_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right) \sum_n (1 + 2n) \exp\left(-\frac{\varepsilon_0(1+2n)}{k_B T}\right) = -2 \varepsilon_0 \operatorname{sh}(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{2 \operatorname{sh} \alpha}\right)$ Avec $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{k_B T}$

Finalement, $\langle \mathcal{E} \rangle = \varepsilon_0 \operatorname{coth}\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right)$

II.B.4) La courbe en trait plein est celle de l'oscillateur quantique : si $T \rightarrow 0 \text{ K}$, $\langle \mathcal{E} \rangle = \varepsilon_0$ et on remarque l'absence de sensibilité de l'énergie à l'augmentation de la température (gel).

La courbe en pointillés est celle de l'oscillateur classique : $\langle \mathcal{E} \rangle = 2 * \frac{1}{2} k_B T$

La courbe de l'oscillateur quantique rejoint celle du classique à haute température : $\varepsilon_0 \operatorname{coth}\left(\frac{\varepsilon_0}{k_B T}\right) \sim k_B T$