

CCP ph 2016

I.1) Le photon a une masse **nulle**, son impulsion est $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ et son énergie vaut $\mathcal{E} = \hbar\omega = pc$

I.2) $\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \mathcal{E}_{visible} \sim 2 \text{ eV}$ et $\mathcal{E}_X \sim 1 \text{ keV}$

I.3) Dans un milieu d'indice n , $k_n = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{n\omega}{c} = nk_{vide} \rightarrow \lambda_n = \frac{\lambda_{vide}}{n} = \frac{\lambda_0}{n}$

L'énoncé ne définit pas λ_0 , nous si !

L'impulsion du corpuscule associé à l'onde est $p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{\lambda_0}$ J'évite le mot "photon" sciemment ...

I.4) $\vec{k} = \frac{h}{p} \vec{e}_x$ $\omega = \frac{\mathcal{E}}{\hbar}$ Surtout ne pas écrire " $\omega = \frac{pc}{\hbar}$ " !

I.5) La conservation de l'énergie mécanique nous permet d'écrire $-eV_i = -eV_f + \frac{p_f^2}{2m}$

$\rightarrow p_f = \sqrt{2meU} \rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$ ($U = 1,5 \cdot 10^2 \text{ V}$)

I.6) $v \sim \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1} \rightarrow \lambda = \frac{h}{mv} \sim 6,2 \text{ nm} > a$ Il doit être traité par la théorie **quantique**

I.7) **Einstein** - Naissance du photon **Schrödinger** - Équation d'onde **Heisenberg** - Indétermination

I.8) $\vec{q} = \frac{h\nu}{v} \vec{u} \rightarrow q = 4,4 \cdot 10^{-34} \text{ m.s}^{-1}$ $e_p = h\nu = 4,1 \cdot 10^{-12} \text{ J}$

Ces valeurs sont très inférieures à celles d'un photon du domaine visible.

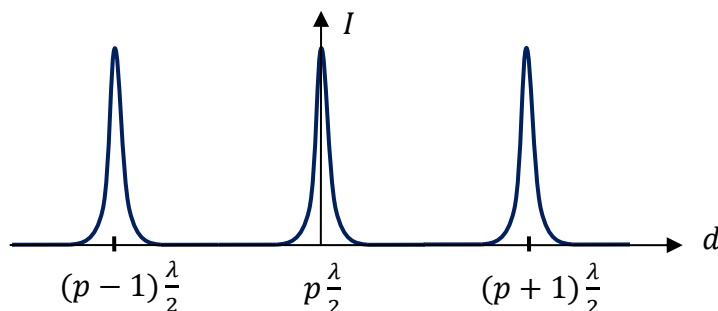
I.9) La **deuxième loi de Newton** intégrée entre deux instants (autour du choc) justifie la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé. L'**énergie** est également une grandeur conservée.

I.10) D'après la conservation de l'énergie, $h\nu_{inc} + qV = h\nu_{ém} \rightarrow \nu_{ém} - \nu_{inc} = \frac{2nV}{\lambda_{inc}} \sin \frac{\theta}{2} = 5,4 \text{ GHz}$

On remarque que $\Delta\nu^+ \ll \nu_{inc}$ donc $\frac{\Delta\nu^+}{\nu_{inc}} = -\frac{\Delta\lambda^+}{\lambda_{inc}}$ ($\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \frac{d\nu}{\nu} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$) avec $\Delta\lambda^+ = \lambda_{ém} - \lambda_{inc}$
 $\rightarrow \frac{\Delta\lambda^+}{\lambda_{inc}} = -\frac{\Delta\nu^+}{c} \lambda_{inc} = -9,6 \cdot 10^{-6}$ (On parle ici de longueur d'onde dans le vide)

Un réseau résout péniblement le doublet du sodium ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 10^{-3}$), ses performances sont ici **insuffisantes**.

II.1-4) $\Delta L = 2d$ Interférences constructives si $\Delta L = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ (L'ordre) $p = \frac{2d}{\lambda}$



$$d_p = p \frac{\lambda}{2} \quad \text{D'où} \quad \delta = \frac{\lambda}{2}$$

II.5 & 6) $v = \frac{c}{\lambda}$ Donc $v^- < v_{inc} < v^+$ $d_0 = \frac{p\lambda_{inc}}{2}$

Clarifions les notations : $\Delta v^+ = v^+ - v_{inc}$ $\Delta\lambda^+ = \lambda^+ - \lambda_{inc} = -\frac{\Delta v^+}{c} \lambda_{inc}^2$ (I.10) $\Delta\lambda^- = \lambda^- - \lambda_{inc}$

II.7.a) Le pic d'ordre $p - 1$ pour λ_{inc} correspond à $d = (p - 1) \frac{\lambda_{inc}}{2} = d_0 - \frac{\lambda_{inc}}{2}$

Celui d'ordre $p + 1$ correspond à $d = (p + 1) \frac{\lambda_{inc}}{2} = d_0 + \frac{\lambda_{inc}}{2}$ On en déduit que $\delta = \frac{\lambda_{inc}}{2}$

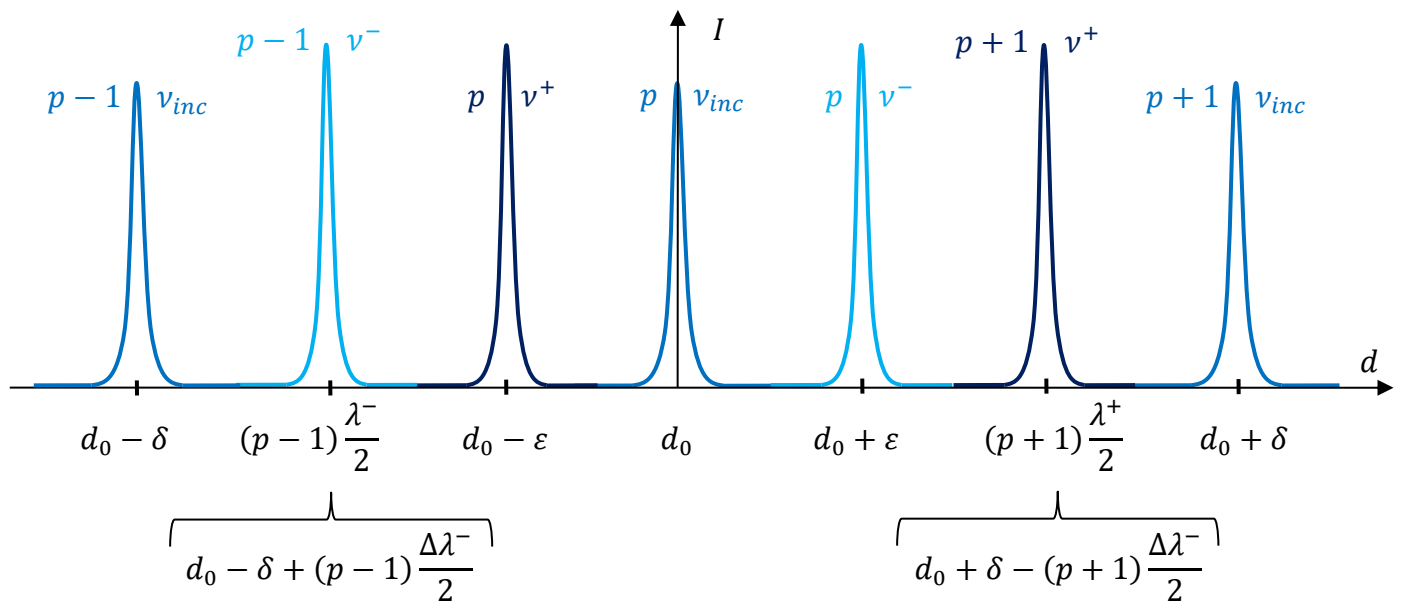
II.7.b) Le pic d'ordre p pour λ^- correspond à $d = p \frac{\lambda^-}{2} = p \frac{\lambda_{inc} + \Delta\lambda^-}{2} = d_0 + p \frac{\Delta\lambda^-}{2} \rightarrow \varepsilon = p \frac{\Delta\lambda^-}{2} > 0$

Celui d'ordre p pour λ^+ correspond à $d = p \frac{\lambda^+}{2} = p \frac{\lambda_{inc} + \Delta\lambda^+}{2} = d_0 + p \frac{\Delta\lambda^+}{2}$ (On admet que $\Delta\lambda^+ = -\Delta\lambda^-$)

II.7.c-d) $Z = \frac{c \Delta\lambda^-}{\lambda_{inc}^2} \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{c}{p\lambda_{inc}} = \frac{c}{2d_0}$

Si $\Delta v^+ > Z$, cela signifie que $\varepsilon > \delta$, les pics Brillouin d'ordre p seraient au-delà des pics "onde incidente" d'ordre $p - 1$ et $p + 1$, d'où **un risque de confusion lors de l'identification des pics** (recouvrement).

Il faut donc $\Delta v^+ < Z \Leftrightarrow d_0 < \frac{c\lambda_{inc}}{2\sqrt{2}nv} = 2,8 \text{ cm}$: La valeur de **1,25 cm** convient.



II.8) $V_{méta} = \frac{\Delta v_{méta}^+ \lambda_{inc}}{\sqrt{2}n} = 1,3 \text{ km.s}^{-1}$

Attention ! Deux valeurs de décalage semblent fausses.

$G = I/I_{réf}$	0,89	0,99	0,99	0,89	0,99	0,99	0,89
Décalage (GHz)	0,0	5,4	9,6	15,0	20,4	24,6	30,0
Ordre	$p - 1$	$p - 1$	p	p	p	$p + 1$	$p + 1$
Fréquence	v_{inc}	v^-	v^+	v_{inc}	v^-	v^+	v_{inc}

$$\text{II.9.a-b)} \quad \Delta L = \frac{2d}{\cos \alpha} - 2d \tan \alpha \sin \alpha = 2d \cos \alpha$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}R^{n-1}e^{i(n-1)\Phi}$$

II.9.c) Les ondes étant cohérentes, il faut sommer les amplitudes complexes :

$$\mathbf{a}_{Tot} = \mathbf{a} \sum_{n=1}^{\infty} R^{n-1} e^{i(n-1)\Phi} = \frac{\mathbf{a}}{1 - R e^{i\Phi}} \Leftrightarrow I = \frac{a^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Phi} = \frac{\frac{a^2}{(1-R)^2}}{1 + \frac{2R(1 - \cos \Phi)}{(1-R)^2}} \quad \text{D'où l'expression de } G.$$

II.9.d) Les franges d'interférences seront **circulaires** car G est uniforme si α est constant.

II.9.e) Si $\frac{\Phi}{2} = p\pi$ ($p \in \mathbb{N}$) alors G est maximal.

Nous retrouvons l'idée que les interférences sont constructives si les ondes sont en phase.

$$\text{II.9.f)} \quad G(\mathbf{0}, d) \sim \left[1 + \frac{4}{\rho^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \right) \right]^{-1}$$

II.10.a) La bande passante d'un filtre passe-bande correspond aux fréquences pour lesquelles en sortie du filtre, la puissance disponible est au moins égale à la moitié de la puissance maximale.

II.10.b) Il faut comprendre la chose suivante : En écartant les miroirs (le miroir de droite ?!) à partir de $d_0 = 1,2615 \text{ cm}$, le premier pic obtenu est celui correspondant à l'ordre p pour λ_0 ($= \lambda_{inc}$!).

L'ordre p est le premier entier supérieur à $\frac{2d_0}{\lambda_0} \rightarrow p = \left\lceil \frac{2d_0}{\lambda_0} \right\rceil = 47604$

$$\text{II.10.c)} \quad \frac{4}{\rho^2} \sin^2 \frac{2\pi d_{1,2}}{\lambda_0} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{2\pi d_{1,2}}{\lambda_0} = \pm \frac{\rho}{2}$$

$$\text{Or } \sin \frac{2\pi d_{1,2}}{\lambda_0} = \sin \frac{2\pi(d_0 + d_{1,2} - d_0)}{\lambda_0} = \sin \left(p\pi + \frac{2\pi(d_{1,2} - d_0)}{\lambda_0} \right) = \pm \sin \left(\frac{2\pi(d_{1,2} - d_0)}{\lambda_0} \right)$$

Donc $\pm \frac{\rho}{2} = \sin \left(\frac{2\pi(d_{1,2} - d_0)}{\lambda_0} \right) \sim \frac{2\pi(d_{1,2} - d_0)}{\lambda_0}$ car d_1 et d_2 sont proches de d_0 . On en déduit que $\Delta d = \frac{\rho \lambda_0}{2\pi}$

II.10.d) Une variation de la longueur d'onde $\Delta \lambda$ nécessite un déplacement $p \frac{\Delta \lambda}{2}$ du miroir afin de passer d'un pic à l'autre au même ordre p . Ainsi, $p \frac{\Delta \lambda}{2} = \frac{\Delta d}{2}$ (et non $\frac{\Delta \lambda}{2}$) ce qui conduit à $\Delta \lambda = \frac{\rho \lambda_0}{2\pi p}$

$$\text{II.10.e)} \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\rho}{2\pi p} \ll 1$$

Les pics sont extrêmement fins, l'intensité est nulle en dehors des valeurs discrètes $d = d_p$

$$\text{II.11)} \quad \Delta d = 4,2 \text{ nm} \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = 1,7 \cdot 10^{-7} \quad G_{min} = \left(1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \right)^{-1} = 6,6 \cdot 10^{-4}$$

Les observations du décalage Brillouin sont facilitées par le fort pouvoir de résolution de l'interféromètre.

Elles sont possibles car $\left| \frac{\Delta \lambda^+}{\lambda_{inc}} \right| = 9,6 \cdot 10^{-6}$ (I. 10) c'est-à-dire $|\Delta \lambda^+| > \Delta \lambda$

II.12) Les modes propres d'une onde stationnaire dans une cavité de longueur d ont pour longueur d'onde $\lambda_p = \frac{2d}{p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Nous retrouvons la condition d'interférences constructives de la question 2.

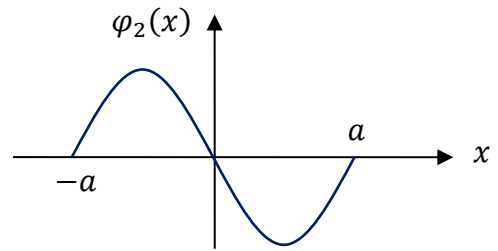
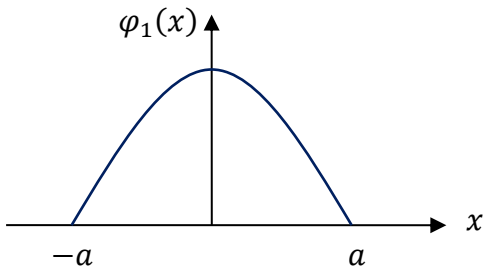
III.1 & 2) $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E} - U(x))\varphi(x) = 0$ Si $U \rightarrow \infty$ alors $\mathcal{E}_c \rightarrow -\infty$ ce qui est impossible : $\varphi = 0$

III.3) $\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$ Or $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$ donc $\begin{cases} A \exp(ika) + B \exp(-ika) = 0 \\ A \exp(-ika) + B \exp(ika) = 0 \end{cases}$

Ce système de Cramer homogène a une solution non nulle si et seulement si son déterminant est nul $\rightarrow \sin(2ka) = 0 \rightarrow 2ka = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$) $\rightarrow \mathcal{E}_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2} = \frac{n^2\hbar^2}{32ma^2}$ Ce sont des états stationnaires **liés**.

III.4 & 5) $\varphi_n(x) = \varphi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right)$ Fonction d'onde que l'on peut normaliser ...

... même si un tel état isolé n'a pas trop de sens : $\varphi_0^2 \int_{-a}^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) dx = 1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}$



III.6) $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ Or $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle = \langle 2m\mathcal{E}_c \rangle = 2m\langle \mathcal{E} \rangle$ donc $\langle \mathcal{E} \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} > 0$
Par symétrie $\langle p_x \rangle = 0$ ($U = 0$)

III.7) L'énergie d'une particule classique **n'est pas quantifiée** et peut être **nulle** (particule au repos).

III.8) $\langle x \rangle = \int_{-a}^a x \varphi_1^2(x) dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^a x \sin^2\left(\frac{\pi}{2a}(x+a)\right) dx = 0$ Là encore, on constate une symétrie.

III.9 & 10) $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \rightarrow \Delta p_x \geq \frac{\hbar\sqrt{3}}{2a}$ D'après III.6 $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} \geq \frac{3\hbar^2}{8ma^2}$
Et en effet, $\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} > \frac{3\hbar^2}{8ma^2}$

L'énoncé nous pousse à réduire l'inégalité d'Heisenberg en égalité et à se contenter d'ordre de grandeur ...