CCMP 2 2021

1) La masse volumique du matériau a pour expression $\frac{3M_*}{4\pi R_*^3}$, en multipliant par le volume du marteau on obtient sa masse voisine de $\boldsymbol{10^6\ kg}$.

2) En évaluant à $2\ m$ la variation d'altitude, $\Delta\mathcal{E}_p \sim \boldsymbol{2.10^7\ J}$ Cette variation correspond à l'énergie libérée lors du choc avec les rochers, elle est équivalente à l'énergie dégagée par 20 bâtons de dynamite !

3) Pour $n > 1$, $\lambda_{1n} = \frac{hc}{\Delta\mathcal{E}} = \frac{hc}{\mathcal{E}_0}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \sim \boldsymbol{91\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)\ nm}$ La raie Ly α $(n = 2)$ est hors document, mais les raies Ly β $(n = 3)$, Ly γ $(n = 4)$ et Ly δ $(n = 5)$ correspondent bien aux observations.

4) Le rapport $\boldsymbol{\frac{n^2}{n^2-1}}$ **tend vers 1** lorsque n augmente, l'écart entre les raies est de plus en plus petit.

5) **L'effet Doppler** est la principale cause de cet élargissement. Les atomes d'hydrogène émetteurs n'ont pas tous la même vitesse **radiale** vers le spectromètre, il en résulte une plage fréquentielle perçue et donc une bande de longueur d'onde : $\frac{\delta f}{f} = \boldsymbol{\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta v_x}{c}}$ Avec v_x , la vitesse de l'atome dans la direction du spectromètre. Si on assimile la largeur des raies au double de l'écart-type des distributions,

$\delta v_x \sim 2\sqrt{\langle v_x^2\rangle - \langle v_x\rangle^2} = 2\sqrt{\langle v_x^2\rangle} = 2\sqrt{\frac{k_BT}{m_H}} \rightarrow \boldsymbol{\frac{\delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{2}{c}\sqrt{\frac{k_BT}{m_H}}}$ Avec T la température de l'étoile

6) On applique la deuxième loi de Newton à l'électron dans le référentiel du noyau. Il est soumis à la force électrique $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e}_r \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e r}} \rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2}m_e v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o r}$

Or $L = m_e r v_e = \sqrt{\frac{m_e r e^2}{4\pi\varepsilon_o}} = n\hbar$ On en déduit que $\mathcal{E} = -\frac{m_e\, e^4}{8\ \varepsilon_0^2\ h^2\ n^2} \rightarrow \mathcal{E}_0 = \frac{m_e\, e^4}{8\ \varepsilon_0^2\ h^2}$

7) La fonction $u(x)$ est proportionnelle à $\frac{x^5}{e^x-1}$, sa dérivée est proportionnelle à $\frac{x^4}{(e^x-1)^2}(e^x(5-x)-5)$

L'équation qui assure un extrémum à u est $\boldsymbol{e^x = \frac{5}{5-x}}$. Si $u'(x) = 0$, $\frac{du}{d\lambda} = -\frac{hc}{k_BT\lambda^2}u'(x) = 0$ aussi !

8 & 9) La solution de l'équation précédente est proche de 5 par valeur inférieure : $\boldsymbol{x \sim 5}$ $(x = 4{,}965\ \dots)$

On en déduit la loi de Wien $\boldsymbol{\lambda_{max}T \sim \frac{hc}{5k_B}} \sim 3\ mm.K$ $\lambda_{max} = 108\ nm \rightarrow T = \boldsymbol{3.10^4\ K}$

10) A la surface de l'étoile, l'énergie d'agitation thermique est de l'ordre de $k_BT \sim 3\ eV < 11\ eV$ $\rightarrow$
Le carbone est à l'état **atomique**

11) En négligeant la masse des électrons, on a $N_e = \frac{N_{nucléons}}{2} = \boldsymbol{\frac{M_*}{2m_p}}$

12 & 13) La dimension d'une pression est $M.L^{-1}.T^{-2}$ et celle d'une énergie est $M.L^2.T^{-2}$

$\rightarrow [P_e] = \left((M.L^2.T^{-2}).T\right)^2.M^{-1}.L^{-5} = \boldsymbol{M.L^{-1}.T^{-2}}$ $\vec{F} = -\boldsymbol{\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\vec{e}_r} \rightarrow \mathcal{E}_p = -\boldsymbol{\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r}}$

14) $\delta W = -d\mathcal{E}_g = -\frac{3\mathcal{G}M_*^2}{5R_*^2}dR_* = -\frac{3\mathcal{G}M_*^2}{5R_*^2}\frac{dV_*}{4\pi R_*^2}$ Or $\delta W = -P_g dV_* \rightarrow P_g = \boldsymbol{\frac{3\mathcal{G}M_*^2}{20\pi R_*^4}}$

15) A l'équilibre $P_g = P_e \rightarrow \frac{3\mathcal{G}M_*^2}{20\pi R_*^4} = \frac{\pi^{4/3}}{15}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{9M_*}{8\pi R_*^3 m_p}\right)^{5/3} \rightarrow \mathcal{G}M_*^{1/3}R_* = \frac{4\pi^{2/3}}{9}\left(\frac{9}{8m_p}\right)^{5/3}\frac{\hbar^2}{m_e}$

Finalement (!) $R_* = \boldsymbol{\frac{(9\pi)^{2/3}}{8}\frac{\hbar^2}{\mathcal{G}M_*^{1/3}m_p^{5/3}m_e} \sim 1.10^4\ km}$

16) $N_c = \frac{N_e}{6} = \frac{N_{nucléons}}{12} = \boldsymbol{\frac{M_*}{12m_p}}$ Chaque cube de côté a contient $8 * \frac{1}{8}$ noyaux, en assimilant le volume du cœur de l'étoile au volume total, on obtient $a^3 N_c = \frac{4}{3}\pi R_*^3 \ \rightarrow\ a = \boldsymbol{2\left(\frac{2\pi m_p}{M_*}\right)^{1/3} R_*}$

17) On se place en coordonnées sphériques (r,θ,φ). La distribution étant invariante par rotation selon θ et φ, la norme du champ ne dépend que de r. Tous les plans contenant $\overrightarrow{OM}$ sont des plans de symétrie pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ $\rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$ On applique le théorème de Gauss sur une sphère centrée en O et de rayon $r < a$: $4\pi r^2 E(r) = \frac{4\rho\pi r^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \boldsymbol{-\frac{2er}{\varepsilon_0 a^3}}$

18) La force subie par le noyau est une **force centrale**, le moment cinétique du noyau est constant ce qui entraine la planéité du mouvement. La deuxième loi de Newton nous permet d'écrire $12m_p\ddot{\vec{r}} = -\frac{12e^2}{\varepsilon_0 a^3}\vec{r}$

$\rightarrow\ \ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{\varepsilon_0 a^3 m_p}\vec{r} = \vec{0}\ \rightarrow\ \omega = \boldsymbol{e\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 a^3 m_p}}}$

La courbe $\mathcal{C}$ est **une ellipse** car les coordonnées cartésiennes de M sont $\begin{cases} x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) = y_0\cos(\omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t) \end{cases}$

avec $(x_0\,, y_0)$ les coordonnées initiales et $(v_{0x}\,, v_{0y})$ les coordonnées de la vitesse initiale.

$s_0^2 = \frac{1}{2}\left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{\omega^2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(r_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)}$ Avec r_0 la distance initiale et v_0 la norme de la vitesse initiale

19) Le potentiel électrique $V(r)$ dans lequel est plongé le noyau est $V(r) = \boldsymbol{\frac{er^2}{\varepsilon_0 a^3}}$ d'après $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

Le système est conservatif, $\mathcal{E}_{cl} = \mathcal{E}_{cl0} = 6m_p v_0^2 + \mathcal{E}_{p0} = 6m_p v_0^2 + 6eV(r_0) = \boldsymbol{12m_p\omega^2 s_0^2}$

20 & 21) D'après la loi de Boltzmann, $p_i = \frac{\exp(-\beta\mathcal{E}_i)}{\sum\exp(-\beta\mathcal{E}_i)} \rightarrow \mathcal{E}_{qs} = \frac{\sum\mathcal{E}_i\exp(-\beta\mathcal{E}_i)}{\sum\exp(-\beta\mathcal{E}_i)}$

Or $\sum\exp(-\beta\mathcal{E}_i) = \exp\left(-\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)\left(\frac{1}{1-\exp(-\beta\hbar\omega)}\right) = \frac{2}{\mathrm{sh}(\beta\hbar\omega/2)}$ et $\sum\mathcal{E}_i\exp(-\beta\mathcal{E}_i) = -\frac{d}{d\beta}\sum\exp(-\beta\mathcal{E}_i)$

donc $\mathcal{E}_{qs} = \boldsymbol{\frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)}$

22) $\mathcal{E}_{qs} = \mathcal{E}_{cl} \ \rightarrow\ \hbar\coth\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right) = 24m_p\omega s^2$ Par identification, on obtient $A = \boldsymbol{\frac{1}{24}}$ et $B = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

23) A la surface de la naine blanche, $\coth\left(\frac{\theta}{T}\right) \sim 1 \ \rightarrow\ \gamma \sim \boldsymbol{3}\ \%\ \rightarrow$ L'état est **solide**

Au cœur de celle-ci, $\coth\left(\frac{\theta}{T_c}\right) \sim \frac{T_c}{\theta} \ \rightarrow\ \gamma \sim \boldsymbol{13}\ \%\ \rightarrow$ L'état est **liquide**