

**1 & 2)**  $x_D = \frac{m_D}{m_D + m_H} = \frac{2}{6422} \sim 0,031\% \quad (3,114 \cdot 10^{-4})$        $x_{noyau D} = \frac{m_n + m_p}{m_n + m_p + m_e} \sim 1 \quad (0,9997)$

**3)** On suppose que la réaction de formation de l'eau est indépendante de la nature de l'isotope et que leur répartition est aléatoire.

$\frac{N_{D_2O}}{N_{H_2O}} = \left(\frac{1}{6420}\right)^2$  et  $\frac{N_{HDO}}{N_{H_2O}} = \frac{2}{6420}$       On vérifie bien que  $\frac{2N_{D_2O} + N_{HDO}}{N_{HDO} + 2N_{H_2O}} = \frac{1}{6420}$

**4)** L'eau lourde est utilisée en tant que solvant en spectroscopie par résonance magnétique nucléaire (la fréquence de résonance du deuton est différente de celle du proton ordinaire). On l'exploite également dans certaines centrales nucléaires afin de ralentir les neutrons issus de la fission sans trop les absorber. On peut citer également son utilisation dans les piscines destinées à l'apprentissage de la natation.

**5)**  $\lambda_n = \frac{hc}{\Delta\varepsilon} = \frac{2hc}{\varepsilon_0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{8hcn^2}{\varepsilon_0(n^2 - 4)}$        $\lambda_3 = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$        $\lambda_4 = 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$       **Visible**

**6)**  $\delta = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'_0} - 1 = \frac{1 + m_e/(m_n + m_p)}{1 + m_e/m_p} - 1 \sim \frac{1 + m_e/2m_p}{1 + m_e/m_p} - 1 \sim -\frac{m_e}{2m_p} = 2,7 \cdot 10^{-4}$  L'identification du deutérium nécessite un spectromètre à fort pouvoir de résolution (Fabry-Perot ou réseau).

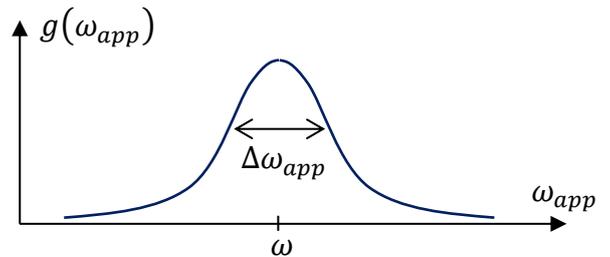
**7 & 8)**  $\vec{v}_K(\mathbf{M}) = \vec{v}_{K'}(\mathbf{M}) + \vec{v}_K(\mathbf{O}') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}'\mathbf{M}}$  Ici  $\vec{\Omega} = \vec{0}$  et  $\vec{v}_K(\mathbf{O}') = \vec{V} = \overrightarrow{cste}$ , on en déduit que  $\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{E}\mathbf{M}} + \vec{V}t + (\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{E}})_{t=0} \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{E}\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{M}} - \vec{V}t + (\overrightarrow{\mathbf{E}\mathbf{O}})_{t=0}$  Avec  $(\overrightarrow{\mathbf{E}\mathbf{O}})_{t=0} = x'_0\vec{e}_x + y'_0\vec{e}_y + z'_0\vec{e}_z$

**9 & 10)**  $\omega = kc$        $\underline{S}(x, t) = S_0 \exp [j(kx - kV_x t - \omega t + kx'_0)] \rightarrow \omega_{app} = \omega(1 + V_x/c)$

**11-15)**  $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$        $f''(v) = 2K\alpha(2\alpha v^2 - 1) \exp(-\alpha v^2) \rightarrow \Delta v = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{4k_B T}{m}}$

Plus la température est élevée, plus les raies majoritaires de l'hydrogène sont larges.

$\Delta\omega_{app} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{4k_B T}{m}}$   
 $\frac{1}{c} \sqrt{\frac{4k_B T}{m}} < 5 \cdot 10^{-6} \rightarrow T < 67 \text{ K}$



La technique de détection n'est pas impossible mais elle nécessite l'emploi d'azote liquide (par exemple !)

**16)** D'après l'une des relations de De Broglie concernant la dualité onde-corpuscule,  $\mathcal{E} = \hbar\omega$

**17)**  $\Delta\Psi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{d(rR'-R)}{dr} Y + \frac{R}{r} \Delta_{ang} Y \right) \exp(-j\omega t) = \frac{1}{r^2} \left( rR''Y + \frac{R}{r} \Delta_{ang} Y \right) \exp(-j\omega t)$   
 Ainsi  $-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left( rR''Y + \frac{R}{r} \Delta_{ang} Y \right) + \mathcal{E}_p \frac{R}{r} Y = \mathcal{E} \frac{R}{r} Y \rightarrow -r^2 \frac{R''}{R} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}) r^2 = \frac{\Delta_{ang} Y}{Y}$

Cette égalité étant vérifiée pour tous  $r, \theta$  et  $\varphi$ , on en déduit que  $-r^2 \frac{R''}{R} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}) r^2 = \frac{\Delta_{ang} Y}{Y} = -C$   
 $\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} R'' + \left( \mathcal{E}_p + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2} \right) R = \mathcal{E} R$  et  $\Delta_{ang} Y = -CY$

**18 & 19)** Le terme  $-\frac{\hbar^2 R''}{2\mu R}$  est l'énergie cinétique radiale,  $\mathcal{E}_p + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2}$  est l'énergie potentielle effective et enfin  $\hbar\sqrt{C}$  est le moment cinétique. Pour une fonction d'onde purement radiale,  $C = 0$ .

$$20) \Delta_{ang} Y = \frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d(\sin \theta \theta')}{d\theta} + \frac{\theta}{\sin^2 \theta} \Phi'' \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{d(\sin \theta \theta')}{d\theta} + C \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

Cette égalité étant vérifiée pour tous  $\theta$  et  $\varphi$ , on en déduit que  $\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{d(\sin \theta \theta')}{d\theta} + C \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = cste$

21) Le caractère  $2\pi$  périodique de  $\Phi(\varphi)$  impose une constante positive de la forme  $m^2$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .

22) On injecte la solution proposée dans l'équation  $\sin \theta \frac{d(\sin \theta \theta')}{d\theta} + (C \sin^2 \theta - m^2)\theta = 0 \quad (\forall \theta)$

Les termes de plus haut degré sont en " $\sin^2 \theta \cos^l \theta$ ", ils sont au nombre de trois :

$$\begin{aligned} -l \sin \theta \frac{d(\sin^2 \theta \cos^{l-1} \theta)}{d\theta} + C \sin^2 \theta \cos^l \theta + \dots &= 0 \rightarrow \\ -2l \sin^2 \theta \cos^l \theta + l(l-1) \sin^4 \theta \cos^{l-2} \theta + C \sin^2 \theta \cos^l \theta + \dots &= 0 \rightarrow \\ -2l \sin^2 \theta \cos^l \theta - l(l-1) \sin^2 \theta \cos^l \theta + C \sin^2 \theta \cos^l \theta &= 0 \quad (\forall \theta) \rightarrow C = l(l+1) \end{aligned}$$

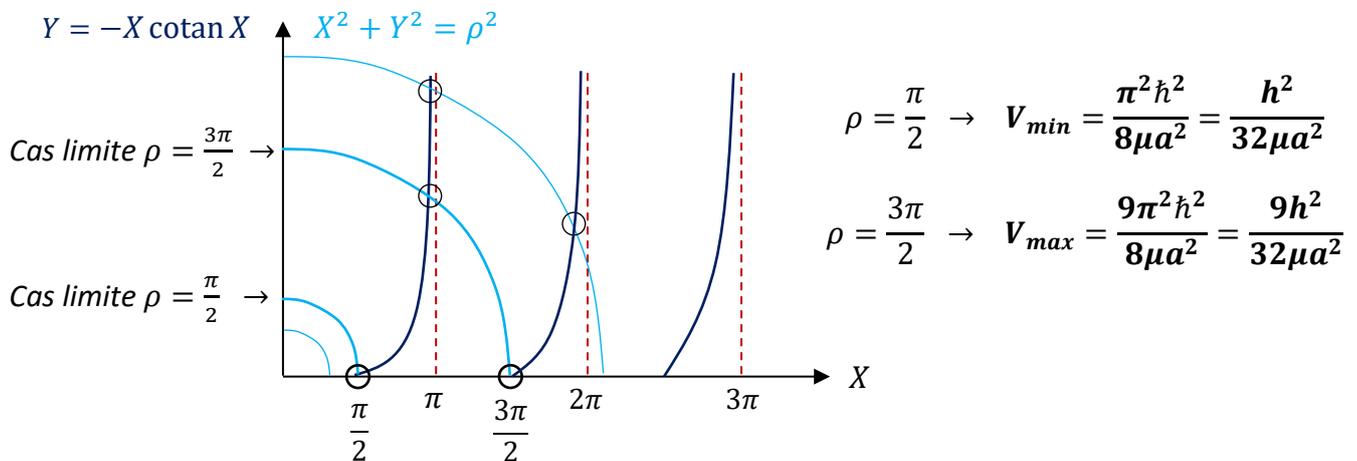
$\sigma = \hbar \sqrt{l(l+1)}$  On reconnaît ici les nombres quantiques secondaire  $l$  et magnétique  $m$  !

23) Pour  $r \leq a$ ,  $R'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}(\mathcal{E} + V_0)R = 0$  On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique ( $k = \frac{\sqrt{2\mu(\mathcal{E} + V_0)}}{\hbar}$ ) dont on ne prend que la solution en sinus pour éviter la divergence de  $\psi$  en  $r = 0$ .

Pour  $r > a$ ,  $R'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\mathcal{E}R = 0$  Equation à solutions exponentielles ( $K = \frac{\sqrt{-2\mu\mathcal{E}}}{\hbar}$ ) dont on ne prend que l'exponentielle décroissante pour éviter la divergence de  $\psi$  en  $r \rightarrow \infty$ .

24) Il y a continuité de  $R$  et  $R'$  :  $A \sin(ka) = B \exp(-Ka)$  et  $Ak \cos(ka) = -BK \exp(-Ka)$

25-28)  $X^2 + Y^2 = \rho^2$  et  $Y = -X \cotan X$



29) D'après ce qui précède, l'existence d'un seul état lié impose  $V_{min} < V_0 < V_{max}$  avec  $V_{min} = 25 \text{ MeV}$  et  $V_{max} = 2,3 \cdot 10^2 \text{ MeV}$

30) Si  $V_0 = V_{min}$ , l'intersection est en  $Y = 0 \rightarrow K = 0 \rightarrow \mathcal{E} = 0$  L'énergie de liaison est nulle.

31)  $-\mathcal{E}_d \ll V_{min}$  Cela signifie que l'intersection est légèrement à droite de la précédente, le rayon du quart de cercle n'a pratiquement pas évolué :  $V_0 \sim V_{min}$

32) L'abscisse du point d'intersection étant proche de  $\frac{\pi}{2}$ , on pose  $X = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \rightarrow \cotan X \sim -\varepsilon \rightarrow Y \sim \frac{\pi}{2} \varepsilon$

Ainsi  $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)^2 + \frac{\pi^2}{4} \varepsilon^2 = \rho^2 \rightarrow V_0 = V_{min} + \frac{\hbar}{\mu a} \sqrt{-2\mu\mathcal{E}_d} - \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \mathcal{E}_d = 35 \text{ MeV} \gg -\mathcal{E}_d$

L'énoncé propose plutôt  $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)^2 = \rho^2 \dots$