

1) Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel **la première loi de Newton est vérifiée**, à savoir un point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme ou est immobile si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle. Le référentiel terrestre peut être supposé galiléen si la durée de l'observation est petite devant un jour (ou si la force d'inertie de Coriolis est négligeable devant les autres forces).

2) La 2^{ème} loi de Newton stipule que
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = v_0 \cos \theta_0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = v_0 \cos \theta_0 t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \theta_0 t \end{cases}$$

Le mouvement est contenu dans le plan (y, z)

3-4) L'équation de la trajectoire est
$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} y^2 + \tan \theta_0 y$$

On reconnaît une parabole symétrique par rapport à l'axe (Sz) avec $S\left(\frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}, \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}\right)$

La portée a pour expression $l = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$, elle est maximale à v_0 fixée pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

5-7) $[f] = M.L.T^{-2} \rightarrow [\alpha] = M.T^{-1}$ Le temps caractéristique du mouvement est $\tau = \frac{m}{\alpha}$

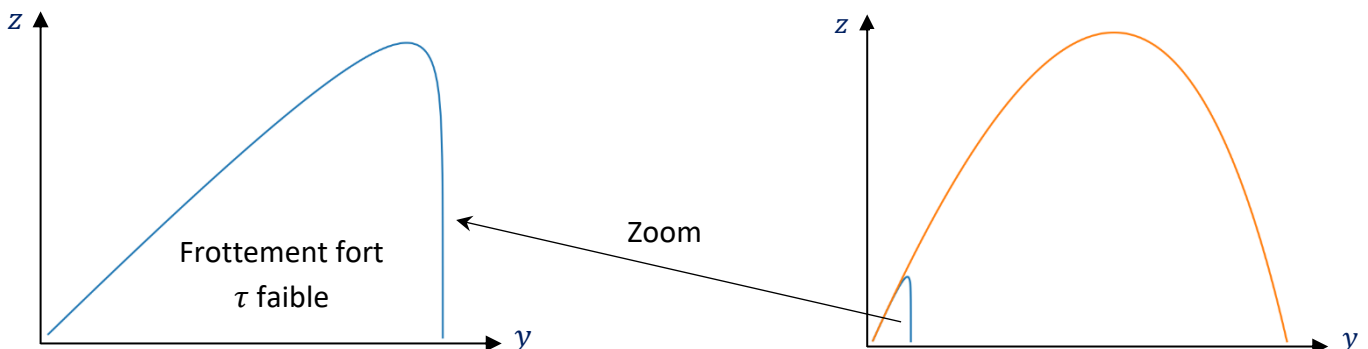
La 2^{ème} loi de Newton stipule que
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} \\ \ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau} \\ \ddot{z} = -g - \frac{\dot{z}}{\tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = v_0 \cos \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \dot{z} = -g\tau + (v_0 \sin \theta_0 + g\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{(Trajectoire toujours plane)} \\ y = v_0 \tau \cos \theta_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \\ z = -g\tau t + (v_0 \sin \theta_0 + g\tau) \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = v_0 \cos \theta_0 t \\ z = v_0 \sin \theta_0 t \end{cases} \text{ si } t \ll \tau \text{ Trajectoire rectiligne}$$

8)
$$\begin{cases} y = v_0 \tau \cos \theta_0 \\ z = -g\tau t + v_0 \tau \sin \theta_0 \end{cases} \text{ si } t \gg \tau \text{ et } t < \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \text{ Mouvement uniforme à la vitesse } \vec{v}_\infty = -g\tau \vec{e}_z$$

Si les conditions précédentes sont vérifiées, le projectile retombe en $y = v_0 \tau \cos \theta_0$

9-10) Si le temps de vol est grand devant τ , on distingue une phase rectiligne oblique suivie d'une phase en cloche asymétrique et enfin une chute verticale. Par contre, pour un temps de vol de l'ordre de τ , la troisième phase n'est pas atteinte, l'allure générale est plus symétrique (frottement faible).



Les deux trajectoires sur la figure de droite sont obtenues avec les mêmes conditions initiales.

11) $T'(x) = e^x(x + 1)$ La fonction est donc décroissante sur $] -\infty ; -1]$ et croissante sur $[-1 ; +\infty[$

$\beta = -\frac{1}{e}$ Le graphe de W se déduit de celui de T par symétrie par rapport à la première bissectrice.

12) Le schéma d'Euler s'appuie sur la fonction dérivée $f(x_{n-1}, W_{n-1}) = \frac{1}{x_{n-1} + \exp W_{n-1}} \left(= \frac{W_n - W_{n-1}}{h} \right)$

```
h=1e-4
N=25000
ksi=[]
for i in range(0,N):
    ksi.append(i*h)

def f(x,y):
    return 1/(x+np.exp(y))
W0=0
W=[W0]
for n in range(1,N):
    W.append(W[n-1]+h*f(ksi[n-1],W[n-1]))
```

13) D'après la réponse à la question 7, $-g\tau t^* + (v_0 \sin \theta_0 + g\tau)\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow g\tau t^* + ug\tau^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right)\right) = 0$ On reconnaît l'équation avec $a = g\tau, b = -c = ug\tau^2, d = -\frac{1}{\tau}$

D'où la solution $t^* = -u\tau + \tau W(u \exp u)$ [Attention ici : u étant inférieur à -1 ,
 $W(u \exp u) \neq u$ mais plutôt $W(u \exp u) = u' > -1$ avec $W(u' \exp u') = u'$]

14) Toujours d'après la réponse à la question 7, $l = y(t^*) = v_0\tau \cos \theta_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right)\right)$

$\Leftrightarrow l = v_0\tau \cos \theta_0 \left(1 - \exp u \exp(-W(u \exp u))\right) = v_0\tau \cos \theta_0 (1 - W(u \exp u)/u)$

Car $\exp(-W(u \exp u)) = \frac{W(u \exp u)}{u \exp u}$ [En fait, $l = v_0\tau \cos \theta_0 (1 - u'/u)$]

15) $\gamma = 2,6 \rightarrow \frac{\gamma^2 - 1}{e} = 2,0 \rightarrow W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right) = 0,85 \rightarrow \theta_{max} = 28^\circ$

Voici les trajectoires obtenues pour différents angles θ_0 , ainsi que les portées et les temps de vol :

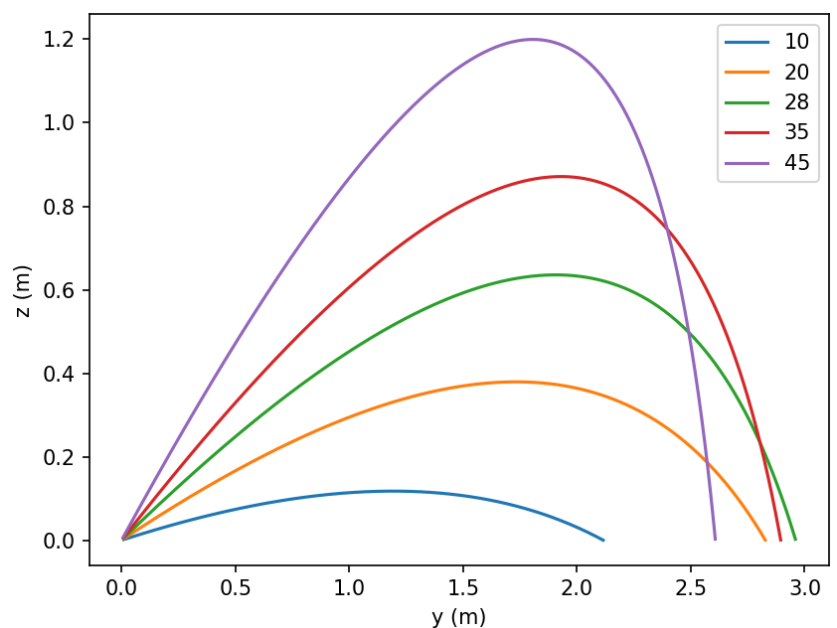
$\theta_0 = 10^\circ \quad l = 2,1 \text{ m} \quad t^* = 0,31 \text{ s}$

$\theta_0 = 20^\circ \quad l = 2,8 \text{ m} \quad t^* = 0,56 \text{ s}$

$\theta_0 = 28^\circ \quad l = 3,0 \text{ m} \quad t^* = 0,73 \text{ s}$

$\theta_0 = 35^\circ \quad l = 2,9 \text{ m} \quad t^* = 0,86 \text{ s}$

$\theta_0 = 45^\circ \quad l = 2,6 \text{ m} \quad t^* = 1,0 \text{ s}$



[Toute cette section est proche (en bien meilleure qualité) du sujet CCP ph-ch 2017 Partie I]

16-17) On applique le T.M.C. en O à la masse m dans le référentiel terrestre. Seul le poids a un moment de force non nul : $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ **Indépendante de θ_0**

18) On obtient l'intégrale première du mouvement en multipliant l'équation obtenue en 16 par $\dot{\theta}$ et en l'intégrant entre $t = 0$ et t . Evidemment, on peut l'obtenir aussi par la loi de conservation de l'énergie !

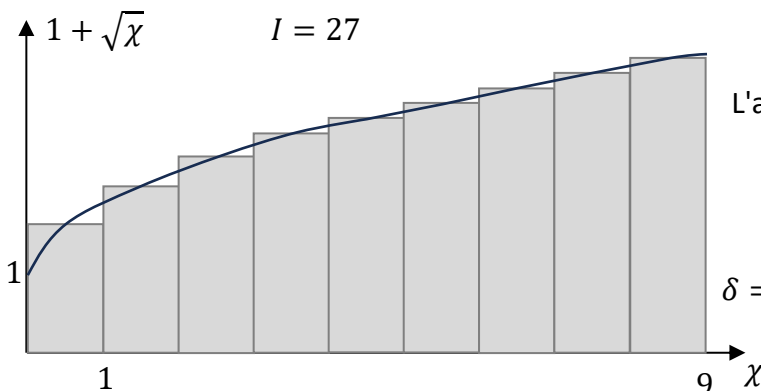
$$\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l} \cos \theta = -\frac{2g}{l} \cos \theta_0 \rightarrow \dot{\theta} = \pm \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

Ainsi, en intégrant sur un quart de période pendant lequel $\dot{\theta} > 0 \rightarrow \int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4} = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$

L'isochronisme des oscillations **n'est plus vérifié**, la période dépend dorénavant de l'amplitude θ_0 .

[On reconnaît ici le grand classique exercice 7 du TD Oscillateurs]

19-22) Pour chaque demi-entier $i + \frac{1}{2}$ compris entre 0 et 9, on définit un rectangle de largeur unitaire et de hauteur $1 + \sqrt{i + \frac{1}{2}}$. La somme des aires des rectangles permet d'approcher la valeur exacte de I .



L'aire \mathcal{A}_i de chaque rectangle médian centré en

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{9}{N} \text{ est } \frac{9}{N} \left(1 + \sqrt{\left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{9}{N}}\right)$$

$$\delta = I - \sum \mathcal{A}_i = 27 - 9 - \left(\frac{9}{N}\right)^{3/2} \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\left(i + \frac{1}{2}\right)}$$

La somme $\sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\left(i + \frac{1}{2}\right)}$ est équivalente à $\frac{2}{3}N^{3/2} + cste$ donc δ décroît en $\left(\frac{1}{N}\right)^{3/2}$

Si on double le nombre de rectangles utilisés, δ est divisée par $2^{3/2} = 2,83$

```
def f(x,phi):
    return 1/(1-x*m.sin(phi)**2)**(1/2)
```

```
S=0
N=100
a=0
b=m.pi/2
pas=(b-a)/N
theta_0=m.pi/3
x=m.sin(theta_0/2)**2 #Erreur d'énoncé
for i in range(N):
    phi=(i+1/2)*pas
    S=S+f(x,phi)
```

D'après la figure 4, $T = 1,05$ s .

Si on envisage de mesurer une heure, le décalage temporel sera de **3 minutes**.

La cycloïde est la trajectoire décrite par un point d'un cercle roulant sans glisser sur un sol plat. Ses équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta + \sin \theta) \\ y(\theta) = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (\text{Par exemple})$$

L'isochronisme du pendule de Huygens est traité dans l'exercice 9 du TD Oscillateurs.

23) Lord Kelvin a estimé l'âge de la Terre en la considérant solide et homogène. Il a donc supposé que son refroidissement n'était dû qu'au phénomène de conduction. Connaissant le gradient géothermique (environ $36 \text{ }^\circ/\text{km}$) et la température initiale de la Terre (environ $4000 \text{ }^\circ\text{C}$), il en a déduit la profondeur à laquelle cette température était encore d'actualité. Grâce à Fourier, il conclut sur l'âge de la Terre.

Or, on sait de nos jours que la Terre est composée en grande partie de **fluide** (noyau externe et manteau) et que par **convection interne**, de la matière chaude remonte vers la surface donnant l'illusion que la Terre est plus jeune que ce qu'elle est véritablement.

La non prise en compte de la radioactivité naturelle de la Terre a également faussé la prédiction de Kelvin mais de façon marginale.

24) Le flux de \vec{j}_Q à travers une surface S est la puissance thermique traversant S . Sa dimension est $\mathbf{M} \cdot \mathbf{T}^{-3}$

La loi de Fourier dit que $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$. Elle nécessite un matériau isotrope pour lequel la température est définie en tous points et dans lequel **il n'y a pas de convection**. La dimension de κ est $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}^{-3} \cdot \mathbf{\Theta}^{-1}$. Il ne faut pas non plus que le gradient de température soit trop grand, ni ne varie trop vite dans le temps.

$$\mathbf{25)} \quad \delta Q = (j_Q(y, t) - j_Q(y + dy, t)) S dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial y} S dy dt$$

$$\text{D'après le premier principe appliqué à la tranche, } dU = -\frac{\partial j_Q}{\partial y} S dy dt \quad \text{Or } dU = \rho c S dy \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\text{Donc } \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{Avec } D = \frac{\kappa}{\rho c} \text{ de dimension } L^2 \cdot T^{-1} \rightarrow L = \sqrt{Dt}$$

$$\mathbf{26)} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \theta(y > 0, t = 0) = \mathbf{0} \quad \theta(y = 0, t > 0) = \mathbf{1} \quad \theta(y \rightarrow +\infty, t > 0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{27)} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \frac{d\theta}{d\eta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \frac{d\theta}{d\eta} \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad \text{D'où le résultat demandé}$$

$$\mathbf{28)} \quad \text{Par séparation des variables, } \frac{d\varphi}{\varphi} = -2\eta d\eta \rightarrow \varphi(\eta) = A e^{-\eta^2} \rightarrow \theta(\eta) = A \int_0^\eta e^{-z^2} dz + \theta(0)$$

$$\text{Or d'après la Q26, } \theta(0) = 1 \text{ et } \lim_{+\infty} \theta(\eta) = 0 \rightarrow A = 1 / \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2/\sqrt{\pi}$$

$$\text{Finalement, } T(y, t) = T_0 - \frac{2(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/2\sqrt{Dt}} e^{-z^2} dz$$

$$\mathbf{29)} \quad \theta(\eta) = B \int_0^\eta e^{-z^2} dz + \theta(0) \quad \text{Avec dorénavant } \theta(0) = \mathbf{0} \text{ et } \theta(\lambda) = 1 \rightarrow B = 1 / \int_0^\lambda e^{-z^2} dz$$

$$\mathbf{30-31)} \quad \delta Q = -\rho S dy_s \Delta h_{sol \rightarrow liq} = S j_Q(y_s^-, t) dt = -S \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(y_s^-, t)} \rightarrow \rho \Delta h_{sol \rightarrow liq} \frac{dy_s}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(y_s^-, t)}$$

$$\mathbf{32)} \quad \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(y_s^-, t)} = \rho c D \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(y_s^-, t)} = \rho c D (T_f - T_0) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{(y_s^-, t)} = \rho c D \frac{T_f - T_0}{2\sqrt{Dt}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_\lambda = \rho c \sqrt{\frac{D}{t}} \frac{T_f - T_0}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\lambda^2}}{\text{erf}(\lambda)}$$

Et comme d'autre part $\frac{dy_s}{dt} = \lambda \sqrt{\frac{D}{t}}$, on obtient bien finalement le résultat proposé.

33) On peut utiliser un algorithme de **dichotomie**.

On écrit l'équation sous la forme $f(\lambda) = 0$ et on définit une fonction dico qui a pour arguments la fonction f et trois paramètres a , b et ε . Dans cette fonction, un couple de variables (u, v) de valeurs initiales (a, b) nous permet de tester le signe du produit $f(u)f(v)$ au sein d'une boucle while.

Si $f(u)f(v) > 0$, la fonction nous indique que la solution n'est pas dans l'intervalle $[a, b]$.

Evidemment, cette situation est évitée car on a généralement une vague idée de la solution recherchée !

Si $f(u)f(v) \leq 0$ et $f(u)f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 0$, v devient $\frac{u+v}{2}$ et on réitère le processus.

Si $f(u)f(v) \leq 0$ et $f(u)f\left(\frac{u+v}{2}\right) > 0$, u devient $\frac{u+v}{2}$ et on réitère le processus.

A la fin de la boucle (condition d'arrêt basée sur la précision ε), la fonction dico donne la valeur $\frac{u+v}{2}$.

```
def f(x):  
    return np.exp(-x**2)/x/erf(x) - 0.71
```

```
def dico(f, a, b, epsilon):  
    if f(a)*f(b)>0:  
        return None  
    u, v=a, b  
    while abs(u-v)>2*epsilon:  
        w=(u+v)/2  
        if f(u)*f(w)<=0:  
            v=w  
        else:  
            u=w  
    return (u+v)/2
```

```
Lambda=dico(f, 0.5, 1, 1e-3)
```

34) $\frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = 0,71 \rightarrow \lambda = \mathbf{0,86} \rightarrow y_s(t_{6 \text{ mois}}) \sim \mathbf{5,7 m}$

Le modèle théorique donne un résultat **très proche** de ceux observés expérimentalement.