CCMP 1 2022

1) $\vec{E} = \rho_w \vec{j}$ Avec $\vec{E}$ le champ électrique ($V.m^{-1}$), ρ_w la résistivité électrique ($\Omega.m$) et $\vec{j}$ la densité surfacique de courant ($A.m^{-2}$). La tension aux bornes du fil est la circulation de $\vec{E}$ $(U = L_w E)$ alors que le courant est le flux de $\vec{j}$ $\left(I = \frac{\pi}{4} d_w^2\, j\right) \rightarrow R_w = \frac{U}{I} = \frac{4\rho_w L_w}{\pi d_w^2} \rightarrow P_j = \frac{4\rho_w L_w}{\pi d_w^2} I^2 \rightarrow \mathcal{P}_v = \frac{16\rho_w}{\pi^2 d_w^4} I^2$

2) $\vec{j}_{th} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$ Avec $\vec{j}_{th}$ la densité surfacique de flux thermique ($W.m^{-2}$), T la température (K) et λ la conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$). Cette loi a été établie à partir de mesures.
Si la température ne dépend que de x, on en déduit que $\vec{j}_{th} = j_{th}(x)\,\vec{e}_x$
Appliquons le premier principe appliqué à une tranche entre x et $x + dx$:
$\mu_w c_w dx \frac{\partial T}{\partial t} = \left(j_{th}(x,t) - j_{th}(x+dx,t)\right)$ Il en résulte que $\mu_w c_w \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\mu_w c_w}{\lambda_w}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

3) L'unité de h est $\boldsymbol{W.K^{-1}.m^{-2}}$ Si la vitesse augmente, la convection est favorisée donc $\boldsymbol{h}$ **augmente**.
La température du fil tend à devenir **uniforme**.

4 & 5) $\pi \frac{d_w^2}{4}\left(j_{th}(x) - j_{th}(x+dx)\right) - h\left(T_w(x) - T_f\right)\pi d_w dx + \mathcal{P}_v \pi \frac{d_w^2}{4} dx = 0$ (Permanent stationnaire !)

$$\rightarrow \frac{d^2 T_w}{dx^2} - \frac{4h}{\lambda_w d_w}\left(T_w(x) - T_f\right) + \frac{16 I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w}\rho_w = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 T_1}{dx^2} + \left(\frac{16\alpha\rho_f I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} - \frac{4h}{\lambda_w d_w}\right) T_1(x) + \frac{16\rho_f I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} = 0 \qquad K_1 < 0 \Leftrightarrow h > \frac{4\alpha\rho_f I^2}{\pi^2 d_w^3}$$

6) Lorsqu'un transfert thermique de puissance $\dot{Q}$ s'établit entre deux zones de températures T_1 et T_2 , la résistance thermique est égale au rapport $\left|(T_2 - T_1)/\dot{Q}\right| \rightarrow$ **Continuité de T** pour un contact parfait

$T_1(x) = A \operatorname{ch}\left(\frac{x}{l_c}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{x}{l_c}\right) - \frac{K_2}{K_1}$ Par parité de $T_1(x)$, $\boldsymbol{T_w(x) = K_2 l_c^2 \left[1 - \operatorname{ch}\left(\frac{x}{l_c}\right)/\operatorname{ch}\left(\frac{L_w}{2l_c}\right)\right] + T_f}$

7) $\dot{Q}_g = 2\left(\pi \frac{d_w^2}{4}\right)\left|j_{th}\left(x = \pm\frac{L_w}{2}\right)\right| = \frac{\pi d_w^2}{2} \lambda_w K_2 l_c \operatorname{th}\left(\frac{L_w}{2l_c}\right)$

8) $\langle T_w \rangle = \frac{2}{L_w}\int_0^{L_w/2} T_w(x)\, dx = K_2 l_c^2 \left[1 - \frac{2l_c}{L_w}\operatorname{th}\left(\frac{L_w}{2l_c}\right)\right] + T_f$

9) On remarque que $\boldsymbol{k = 4}$, on en déduit que $\operatorname{ch}(k) \gg 1 \rightarrow T_{w,max} \sim K_2 l_c^2 + T_f$
et $\operatorname{th}(k) \sim 1 \rightarrow \langle T_w \rangle \sim K_2 l_c^2 \left[1 - \frac{1}{k}\right] + T_f$ Ainsi, $\xi \sim \frac{k}{k-1} = \frac{4}{3}$ Sur la figure 2, le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{4}{3}\right)$ **est bien situé entre** les courbes paramétrées par $k = 2$ et $k = 5$.

10) Plus k est grand, plus la fonction $f(y)$ est uniforme. Cela signifie que pour un fil long ($\boldsymbol{L_w \gg l_c}$), la température $\boldsymbol{T_w(x)}$ **diffère très peu de sa valeur moyenne** $\boldsymbol{\langle T_w \rangle}$.

11) $R_{w,\infty} = \rho_f\left[1 + \alpha\left(T_w(x) - T_f\right)\right]\frac{4L_w}{\pi d_w^2} \sim R_f\left[1 + \alpha\left(\langle T_w \rangle - T_f\right)\right]$

12) $\dot{Q}_j = R_f\left[1 + \alpha\left(\langle T_w \rangle - T_f\right)\right] I^2$ ($\sim \dot{Q}_f = h\left(\langle T_w \rangle - T_f\right)\pi d_w L_w$ d'après le bilan thermique)

13) $[\mathcal{R}_e] = \frac{(M.L^{-3})(L.T^{-1})L}{M.L^{-1}.T^{-1}} = 1$ Le nombre de Reynolds est **sans dimension**

14) $[\mathcal{N}_u] = \frac{(W.K^{-1}.L^{-2})L}{W.K^{-1}.L^{-1}} = 1$ Le nombre de Nusselt est **sans dimension**

Si le saut de température $T_w \to T_f$ se produit sur une épaisseur de l'ordre de d_w , on a alors $j_{th} \sim \lambda_f \frac{T_w - T_f}{d_w}$ et $j_{th}^{cc} = h(T_w - T_f)$: Le nombre de Nusselt est le rapport des deux flux, plus il est grand plus cela signifie que la convection est importante. Ainsi, $\mathcal{N}_u$ augmente quand la vitesse de l'écoulement augmente.

15) D'après les résultats obtenus pour un fil long, $R_{w,\infty} \sim R_f\left[1 + \alpha K_2 l_c^2\left(1 - \frac{2l_c}{L_w}\right)\right] \sim R_f(1 + \alpha K_2 l_c^2)$

Or $\alpha K_2 = -\frac{1}{l_c^2} + \frac{4h}{\lambda_w d_w} = -\frac{1}{l_c^2} + \frac{4\lambda_f \mathcal{N}_u}{\lambda_w d_w^2}$ Ainsi, $R_{w,\infty} = R_f(1 + \alpha K_2 l_c^2) = \frac{4R_f\lambda_f\mathcal{N}_u l_c^2}{\lambda_w d_w^2} \to \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

16) $\dot{Q}_f = \pi d_w h \int_{-L_w/2}^{L_w/2} (T_w(x) - T_f)\,dx = \boldsymbol{\pi h d_w L_w(\langle T_w\rangle - T_f)}$ (Résultat déjà obtenu en 12)

17) $\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} = \frac{2hL_w(\langle T_w\rangle - T_f)}{\lambda_w d_w K_2 l_c} = \frac{2hL_w l_c}{\lambda_w d_w} = \mathcal{N}_u \theta \frac{\lambda_f}{\lambda_w}\frac{L_w}{2l_c}$ Sachant que $\lambda_f \sim \lambda_{air} = 0{,}03\, W.K^{-1}.m^{-1}$

$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \sim 10 * 10^{-4} * 4$ … Bof ! Ce n'est pas du tout grand devant 1 … ? La valeur $\mathcal{N}_u = 10$ est curieuse.

Comme $R_{w,\infty} > R_f$, si $\theta \sim 1$ cela signifie que $\frac{\lambda_w}{\lambda_f} < 10$! Erreur d'énoncé ? $\mathcal{N}_u = 10^4/10^5$?

$\theta \sim 1 \to V = \frac{\eta}{\mu_f d_w B^2}\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_f}\frac{R_{w,\infty}}{R_f} - A\right)^2$ La mesure de V se ramène en effet à la mesure de $R_{w,\infty}$.

18 & 19) On applique le premier principe au fil (avec C, **sa capacité thermique**).

$$C\frac{dT_e}{dt} = R_e(t)I^2 = R_f\left[1 + \alpha\left(T_e(t) - T_f\right)\right]I^2 \to \boldsymbol{\tau_1} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{\alpha R_f I^2}}$$

$$\boldsymbol{T_e(t) - T_f} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbf{exp}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\tau_1}}\right) - \mathbf{1}\right) \qquad \Delta \boldsymbol{T_{e,max}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbf{exp}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\tau_1}}\right) - \mathbf{1}\right)$$

20) On applique le premier principe au fil avec ce coup-ci l'échange conducto-convectif.

$C\frac{dT_e}{dt} = -\pi d_w L_w h\left(T_e(t) - T_f\right) \to \boldsymbol{T_e(t) - T_f} = \Delta\boldsymbol{T_{e,max}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{\boldsymbol{t-\tau}}{\boldsymbol{\tau_2}}\right)$ Avec $\boldsymbol{\tau_2} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{\pi d_w L_w h}}$

21) Cela confirme que lors de la phase de chauffe, le refroidissement par **convection est négligeable**.

22) La pente des droites correspond à " $-\frac{1}{\tau_2} = -\frac{\pi L_w \lambda_f}{C}\boldsymbol{\mathcal{N}_u}$ " , ce qui permet d'accéder à la vitesse V.

23) L'amplitude de $T_r(t)$ est moindre car le premier fil émet de l'énergie **dans toutes les directions**. La durée plus grande du pic de $T_r(t)$ peut s'expliquer par un comportement **dispersif** du milieu.

24) La mesure de l'écart temporelle Δt entre les maximums de $T_e(t)$ et $T_r(t)$ permettrait d'obtenir la vitesse $V = \epsilon/\Delta t$.

On pourrait également évaluer la durée d'un pic en se fixant un seuil final, par exemple $\frac{T_r - T_f}{\Delta T_{r,max}} = 0{,}2$