

1) On applique le T.M.C. scalaire à l'aiguille de la boussole sur l'axe vertical  $\Delta$ . Elle subit le moment de force  $\vec{m} \wedge \vec{B}$ . Projeté sur  $\vec{e}_r$ , seule la composante horizontale de  $\vec{B}$  intervient :  $I\ddot{\alpha} = -mB_H \sin \alpha$  avec  $\alpha$  l'angle orienté entre  $\vec{B}_H$  et  $\vec{m}$  (négatif sur la figure 1). A l'équilibre **stable**,  $\alpha = 0$ .

Ceci est confirmé par  $\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_H = -mB_H \cos \alpha \rightarrow \mathcal{E}_p^{min} = \mathcal{E}_p(\alpha = 0)$

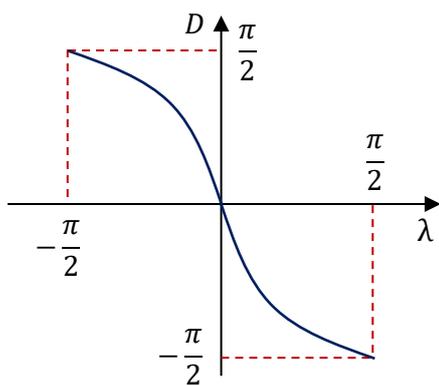
2 & 3)  $\ddot{\alpha} + \frac{mB_H}{I} \alpha = 0 \rightarrow B_H = \frac{4\pi^2 I}{m\tau_{osc}^2} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} (2\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$

4) A l'équateur ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), le champ est vers le Nord :  $M_0 < 0 \quad |M_0| = \frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} = 7,9 \cdot 10^{22} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} (\text{A} \cdot \text{m}^2)$

Le champ  $\vec{B}$  est **vertical entrant** ( $-\vec{e}_r$ ) au pôle Nord ( $\theta = 0$ ) et **vertical sortant** ( $\vec{e}_r$ ) au pôle Sud ( $\theta = \pi$ ).  $B(\theta = 0 \text{ ou } \pi) = 2B_E$  Le champ est plus intense conformément au rapprochement des lignes de champ.

5) Dans l'hémisphère Nord, la déclinaison est **négative**. Le vecteur  $\vec{e}_N$  étant égale à  $-\vec{e}_\theta$ ,  $D = (\vec{B}, -\vec{e}_\theta)$

On en déduit que  $-B_\theta = \|\vec{B}\| \cos D$  et  $B_r = \|\vec{B}\| \sin D \rightarrow \tan D = -2 \cotan \theta = -2 \tan \lambda$



Les boussoles "s'affolent" à proximité des pôles car la composante  $B_H$  responsable de la stabilisation de l'équilibre s'y annule.

La composante verticale de  $\vec{B}$  crée un moment de force horizontal qui tend à faire pivoter l'aiguille **vers l'avant** dans l'hémisphère **Nord** (alignement de  $\vec{m}$  sur  $\vec{B}$ ). Malheureusement, les fabricants compensent ce phénomène, en lestant l'extrémité Sud de l'aiguille d'une boussole destinée à l'hémisphère Nord ! Il faut donc connaître le type de boussole que l'on tient dans ces mains et voir où elle fonctionne bien !

[Dans cette première partie, on est relativement proche de l'exercice 2 du TD Dipôles en régime stationnaire]

6) Le plan horizontal est un plan de symétrie pour la distribution donc  $\vec{B}(P)$  est **suiant**  $\vec{e}_z$ . Le courant (supposé positif) dans les spires circule dans le sens horaire donc  $\vec{B}(P) \cdot \vec{e}_z < 0 \rightarrow 0 < M_b < M_a = \frac{L}{2\pi}$

7)  $d\vec{F}_L = -i(t) dr \vec{e}_r \wedge \vec{B}(P) = i(t) B_z(P) dr \vec{e}_\theta \rightarrow \vec{\Gamma}_L = \int_0^{r_b} \vec{OP} \wedge d\vec{F}_L = -M_b i^2(t) \vec{e}_z$

8) La puissance des actions de Laplace  $P_L (\mathcal{E}_{ém} \rightarrow \mathcal{E}_{méca})$  est opposée à la puissance de la force électromotrice  $P_{f.ém}^{ind} (\mathcal{E}_{méca} \rightarrow \mathcal{E}_{ém}) : M_b i^2(t) \omega(t) = e(t) i(t) \rightarrow e(t) = M_b \omega(t) i(t)$

9) On applique le T.M.C. scalaire au noyau sur  $\vec{e}_z$  :  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Gamma_0}{I} - \frac{M_b}{I} i^2(t)$

On applique la loi de la maille au circuit :  $e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri(t) \rightarrow \frac{di}{dt} = i(t) \left( \frac{M_b}{L} \omega(t) - \frac{R}{L} \right)$

10)  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$  On reconnaît en  $\mathcal{H}$ , l'**énergie totale** du système. Le gradient de  $\mathcal{H}$  s'annule si et seulement

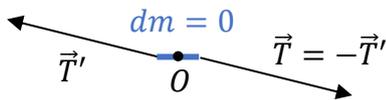
si les deux dérivées partielles s'annulent :  $\omega = \frac{R}{M_b}$  et  $i = \pm \sqrt{\frac{\Gamma_0}{M_b}}$

Ce sont les points où  $\mathcal{H}$  est **extrémale** et pour lesquels le régime est **permanent**  $\left( \frac{di}{dt} = 0, \frac{d\omega}{dt} = 0 \right)$ .

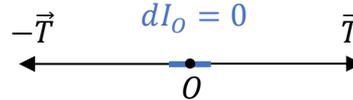
11) On pose  $x = i \sqrt{\frac{M_b}{\Gamma_0}}$  et  $y = \omega \frac{M_b}{R} \rightarrow \mathcal{H}(x, y) = \frac{L\Gamma_0}{M_b} \left( \frac{1}{2} x^2 - \ln x + \frac{IR^2}{L\Gamma_0 M_b} \left( \frac{1}{2} y^2 - y \right) \right)$

On ne trouve pas une proportionnalité avec  $f(x, y)$  mais  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  s'annule aux mêmes points  $(\pm 1 ; 1) !$   
 Les courbes de valeurs constantes sont **fermées**, cela témoigne de la **stabilité** des équilibres (périodicité).  
 Le modèle est intéressant du point de vue des fluctuations de  $i$  (donc de  $m$ ) et également par le fait qu'il propose deux points hyperstables à courants opposés : l'inversion des pôles n'est pas justifiée par cette étude mais la possibilité d'avoir un dipôle opposé pour le même sens de rotation  $\omega$  est intéressante.

12) On applique le P.F.D. et le T.M.C. à un élément de masse  $dm$  nulle et de moment d'inertie  $dI_O$  nulle :



$$dm \vec{a} = \vec{0} = \sum \vec{F} \rightarrow \vec{T} \text{ Uniforme}$$



$$dI_O \dot{\vec{\Omega}} = \vec{0} = \sum \vec{M} \rightarrow \vec{T} \text{ Colinéaire à la corde}$$

13) P.F.D. à plat :  $M\dot{v} = F - \mu_d Mg$

P.F.D. avec une pente ascendante :  $M\dot{v} = F - (\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha) Mg \rightarrow \mu'_d = \sin \alpha + \mu_d \cos \alpha$

14)  $F_0^{min} = \mu_s Mg = 3,9 \cdot 10^2 \text{ N}$

15)  $\dot{v} + \frac{\beta}{M} v = \frac{F_0}{M} - \mu_d g \rightarrow v(t) = v_0 \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$  Avec  $v_0 = \frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_d Mg}{\beta}$  et  $\tau = \frac{M}{\beta}$

$\frac{v_0 - v(t_1)}{v_0} = \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 0,05 \rightarrow t_1 = \ln 20 \tau \sim 3\tau \rightarrow \beta = 3,0 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

Et enfin,  $F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg = 1,1 \cdot 10^3 \text{ N}$

16)  $T \cos \theta = \mu_d Mg$  Et  $T \sin \theta = \frac{Mv_0^2}{R} \rightarrow T = M \sqrt{(\mu_d g)^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}$  Et  $\tan \theta = \frac{v_0^2}{\mu_d g R}$

17) On applique le premier principe en termes de puissance à la tranche de glace Napolitaine :

$$\rho_g c_g \delta z \frac{\partial T_g}{\partial t} = j_{th}(z) - j_{th}(z + \delta z) = -\frac{\partial j_{th}}{\partial z} \delta z \rightarrow \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} - \frac{\rho_g c_g}{\lambda_g} \frac{\partial T_g}{\partial t} = 0$$

18) Equation qu'on linéarise pour obtenir (après simplification par  $\Delta T$ ) :  $\Delta t = \frac{\rho_g c_g (\Delta z)^2}{\lambda_g}$

En hiver, la température  $T_2$  et l'épaisseur de glace évoluent très lentement, il faut attendre une durée

$\tau \gg \frac{\rho_g c_g z_g^2}{\lambda_g}$  pour que  $T_g$  ne dépende que de  $z$ . [Plus de précision en fin de sujet]

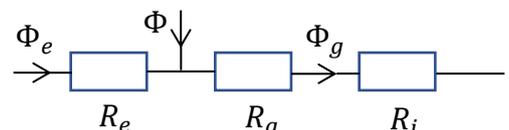
19 & 20) On note  $\Phi_e$  et  $\Phi_g = \mathcal{S}P_u$ , les puissances traversant l'eau et la glace **vers le haut**.

$$R_e = \frac{T_1 - T_0}{\Phi_e} = \frac{e}{\lambda_e S} \quad R_g = \frac{T_0 - T_s}{\Phi_g} = \frac{z_g(t)}{\lambda_g S} \quad R_i = \frac{T_s - T_2}{\Phi_g} = \frac{1}{hS}$$

21) On applique le premier principe à la tranche de glace  $dz_g$  qui se forme pendant  $dt$ . La variation d'enthalpie due à la glaciation est égale à l'énergie entrant par dessous moins celle qui sort par dessus :

$$-l_f \rho_g S dz_g = (\Phi_e - \Phi_g) dt \rightarrow \Phi_e + \Phi = \Phi_g$$

Avec  $\Phi = l_f \rho_g S \frac{dz_g}{dt}$



22)  $l_f \rho_g \frac{dz_g}{dt} + \frac{T_1 - T_0}{\frac{e}{\lambda_e}} = \frac{T_0 - T_2}{\frac{z_g(t)}{\lambda_g} + \frac{1}{h}}$  On peut, d'après l'indication, négliger le terme  $\frac{T_1 - T_0}{\frac{e}{\lambda_e}}$ .

$$\frac{l_f \rho_g}{\lambda_g} z_g \frac{dz_g}{dt} + \frac{l_f \rho_g}{h} \frac{dz_g}{dt} = T_0 - T_2 \rightarrow \frac{l_f \rho_g}{2\lambda_g} z_g^2(t) + \frac{l_f \rho_g}{h} z_g(t) = (T_0 - T_2)t \quad (z_g(0) = 0)$$

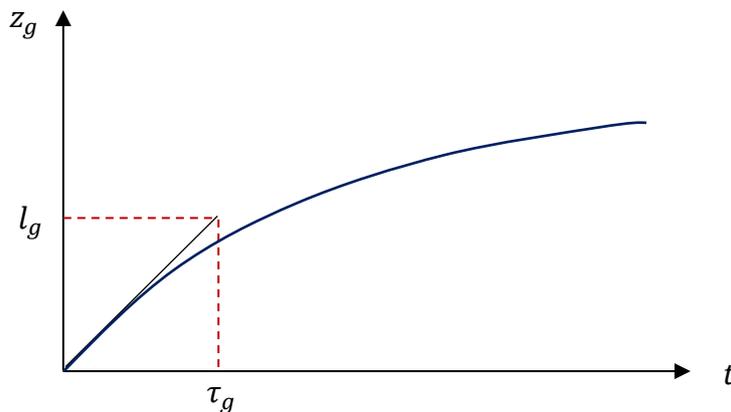
Par analyse dimensionnelle (et malice), on remarque qu'il faut multiplier toute la ligne par  $\frac{4\lambda_g^2}{(T_0 - T_2)h^2}$  pour

obtenir la forme demandée : 
$$\frac{2\lambda_g l_f \rho_g}{(T_0 - T_2)h^2} z_g^2(t) + \frac{4\lambda_g^2 l_f \rho_g}{(T_0 - T_2)h^3} z_g(t) = \frac{4\lambda_g^2}{h^2} t$$

On identifie  $l_g = \frac{2\lambda_g}{h}$  et  $\tau_g = \frac{2\lambda_g l_f \rho_g}{(T_0 - T_2)h^2}$

**L'A.R.Q.S. n'est valable que si  $\tau_g \gg \Delta t$**

23) La première phase ( $t \ll \tau_g$ ) est **quasi linéaire** puis l'augmentation de l'épaisseur est de moins en moins rapide. Pour ma part, j'évitais le mot "régime".



[Cette partie est proche de l'exercice I du TD Transfert thermique, voire très proche à partir de la question 22 et la simplification négligeant le flux  $\Phi_e$ ]