

1) $q = Cu$ C en Farad (F) ; $u = Ri$ R en Ohm (Ω) ; $\Phi = Li$ L en Henry (H)

2) $i = \frac{dq}{dt}$; On intègre l'équation de Maxwell-Faraday ($\overrightarrow{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$) sur le circuit fermé, dans le sens de i (sens générateur), on obtient grâce au théorème de Stokes : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$
 $\Leftrightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} \Leftrightarrow u = \frac{d\Phi}{dt}$ (Convention récepteur)

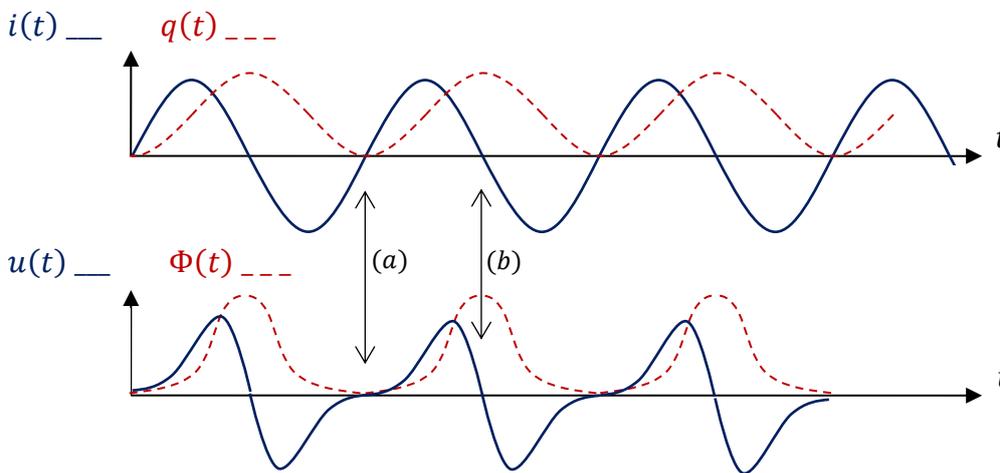
3) $dq = C(u)du$; $du = R(i)di$; $d\Phi = L(i)di$; $dq = i(t)dt$; $d\Phi = u(t)dt$

4) $[M] = [\Phi][q]^{-1} = [u] \cdot T \cdot (I \cdot T)^{-1} = [u] \cdot I^{-1}$ On reconnaît une résistance en **Ohm** (Ω)

5) En série, $u = u_1 + u_2 = \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} = (M_1 + M_2)i \rightarrow M_{\acute{e}q} = M_1 + M_2$

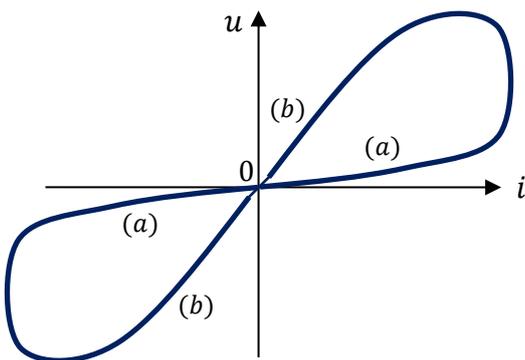
En parallèle, $i = i_1 + i_2 = \frac{1}{M_1} \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{1}{M_2} \frac{d\Phi_2}{dt} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)u \rightarrow M_{\acute{e}q} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$

6-8) $q(t) = \int_0^t i(t')dt' = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$



La notion de résistance dynamique ($R_D = \frac{du}{di}$) est utile pour analyser ces courbes :

$$R_{Da} = \left(\frac{du}{di}\right)_{(a)} \ll R_{Db} = \left(\frac{du}{di}\right)_{(b)}$$



Selon le régime, le memristor peut passer d'une valeur de **résistance élevée à une autre beaucoup plus faible**, créant ainsi une information binaire. Par exemple, un memristor passant serait interprété comme un "0" alors qu'un memristor bloqué correspondrait à un "1".

9 & 10) La résistance du memristor dépend donc **de i mais également de son histoire q** ($q = \int idt$). C'est pour cette raison qu'on adopte la plupart du temps la notation $M(q)$.

Les régimes se croisent en l'origine ($i = 0, u = 0$), cela signifie que même après avoir été déconnecté, un memristor conserve son état antérieur lié au flux de charges qu'il a pu recevoir dans le passé.

11) On applique la 2^e loi de Newton à la charge q : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\vec{E}_0}{m}$; $\vec{v} = \mathbf{A}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau q\vec{E}_0}{m}$; $\vec{v} \rightarrow \frac{\tau q\vec{E}_0}{m}$
Le régime permanent est atteint dès 10^{-11} s environ, l'hypothèse n'est pas contraignante.

12) $\mu = \frac{\tau q}{m}$; $\vec{j}_0 = nq\vec{v} = \frac{n\tau q^2 \vec{E}_0}{m}$ C'est la loi d'Ohm locale.

13 & 14) $E_0 = \frac{u_0}{l}$ Et $i = j_0 S = \gamma_0 E_0 S \rightarrow u_0 = \frac{l}{\gamma_0 S} i$ Dans l'hypothèse du régime permanent stationnaire, la fonction $u_0(i)$ est linéaire, la tension suit instantanément le courant.

15) Dorénavant, $\vec{v} = \frac{\tau q \vec{E}_1}{m(1+j\omega\tau)} \rightarrow i = \frac{\gamma_0 \vec{E}_1}{(1+j\omega\tau)} S \rightarrow \underline{Z} = \mathbf{R}_0(1 + j\omega\tau) \sim \mathbf{R}_0$ si $\omega \ll \frac{1}{\tau} = 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$
Le conducteur est un passe-bas, l'amplitude du courant diminue avec la fréquence. Les porteurs de charge s'agitent mais n'ont plus le temps, à haute fréquence, d'atteindre le régime permanent.

16-18) $\mathbf{P} = q\vec{E}_0 \cdot \vec{v} \rightarrow p_{vol} = nq\vec{v} \cdot \vec{E}_0 = \vec{j}_0 \cdot \vec{E}_0 \rightarrow p = p_{vol} S l = j_0 S E_0 l = i u \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{M} i^2$

19) $R_{mem0} = \frac{z_0}{l} R_{on} + \frac{(l-z_0)}{l} R_{off}$

20) La vitesse de progression $\frac{dz}{dt}$ de la frontière correspond à la vitesse des porteurs de charge :

$\frac{dz}{dt} = v = \mu E_{on} = \mu \frac{V(0)-V(z)}{z}$ Or, $V(0) - V(z) = \frac{z}{l} R_{on} u$ (Pont diviseur de tension) et $u = R_{mem} i$

Finalement $\frac{dz}{dt} = \frac{\mu R_{on} i(t)}{l}$

21) $\frac{dz}{dt} = \frac{\mu R_{on}}{l} \frac{dq}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{z}(t) = \frac{\mu R_{on}}{l} q(t) + z_0 \rightarrow Q > \frac{l(l-z_0)}{\mu R_{on}} \rightarrow \mathbf{Q}_{min} = \frac{l^2}{\mu R_{on}}$ (Cas défavorable si $z_0 = 0$)

22) Les memristances en série s'ajoutent : $M(q) = \frac{z(q)}{l} R_{on} + \frac{(l-z(q))}{l} R_{off} = R_{mem0} + \frac{\mu R_{on}(R_{on}-R_{off})}{l^2} q$

Le terme $\mu R_{on} |R_{on} - R_{off}|$ est de l'ordre de $10^3 \Omega \cdot m^2 \cdot C^{-1}$.

La charge q est forcément modeste ($1 \mu A$ pendant $1 ns$?) c'est à dire $10^{-15} C$, on en déduit que la memristance aura des variations significatives autour de R_{mem0} si l est de l'ordre du nanomètre.

23) $q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \rightarrow \Phi(t) = \int_0^{q(t)} M(q) dq$ Or $M(q) \sim R_{off} - \frac{\mu R_{on} R_{off}}{l^2} q$

Donc $\Phi(t) \sim R_{off} q(t) - \frac{\mu R_{on} R_{off}}{2l^2} q^2(t) = \frac{R_{off} i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) - \frac{\mu R_{on} R_{off} i_0^2}{2l^2 \omega^2} (1 - \cos \omega t)^2$

Et enfin $u(t) = \frac{d\Phi}{dt} = R_{off} i_0 \sin \omega t \left[1 - \mu \frac{R_{on} i_0}{l^2 \omega} (1 - \cos \omega t) \right]$

24) Nous commençons l'analyse de la courbe en l'origine à $t = 0^+$ ($u = 0^+, i = 0^+, i \nearrow$).

L'interprétation s'appuie principalement sur le déplacement de la frontière et l'expression de la résistance

du memristor : $R_{mem} = \frac{z}{l} R_{on} + \frac{(l-z)}{l} R_{off}$

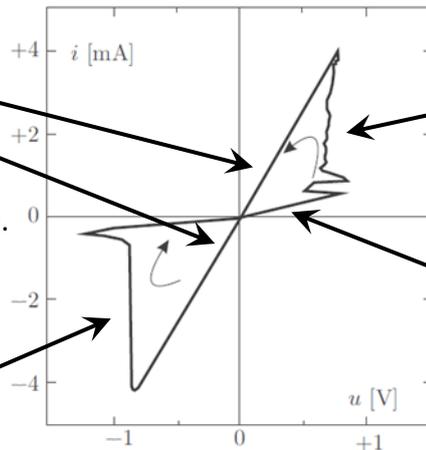
Le ruban est **bon conducteur**,

la pente est forte $\left(\frac{1}{R_{on}}\right)$.

La charge q atteint son maximum en l'origine puis commence à décroître ($i < 0$).

Zone de transition

$z \rightarrow 0 \quad R_{mem} \rightarrow R_{off}$



Zone de transition

$z \rightarrow l \quad R_{mem} \rightarrow R_{on}$

La charge q qui a circulé est encore faible, $M \sim R_{off}$ et $u(t) \sim R_{off} i_0 \sin \omega t$

Le ruban est **peu conducteur**,

la pente est faible $\left(\frac{1}{R_{off}}\right)$.

25 & 26) $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} - V(x)) \varphi(x) = 0 \rightarrow \varphi_1(x) = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}$ et $\varphi_2(x) = B_2 e^{ik_2 x}$

avec $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{E}}$ et $k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} + V_0)}$

27) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \rightarrow A_1 + B_1 = B_2$ et $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) \rightarrow k_1(B_1 - A_1) = k_2 B_2$

On en déduit que $r = \frac{A_1}{B_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ et $t = \frac{B_2}{B_1} = 1 + r = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

28) $R = r^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2 = 0,25$ et $T = \frac{k_2}{k_1} t^2 = 1 - R = 0,75$

29) Les grandeurs R et T **ne dépendent pas du sens** de parcours car une inversion des indices 1 et 2 ne modifie pas les résultats. La description du memristor par un quanton abordant une falaise (ou une marche) de potentiel **n'est pas convaincante**.

[Cette dernière partie correspond à l'exercice 3 du TD Dynamique quantique]