CCMP 1 2015

1) $\vec{p}_f(t) = \boldsymbol{m(t)\vec{v}(t)}$ $\quad$ $\vec{p}_f(t+dt) = \boldsymbol{(m(t) - D_m dt)\vec{v}(t+dt)}$ $\quad$ $\vec{p}_g(t+dt) = \boldsymbol{D_m dt(\vec{v}(t+dt) + \vec{u})}$

2) On applique la deuxième loi de Newton au système fermé de masse $m(t)$, constitué de la fusée et du gaz contenu à l'instant t : $\frac{d(\vec{p}_f + \vec{p}_g)}{dt} = m(t)\vec{g} \iff \lim_{dt \to 0} \frac{m(t)(\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)) + D_m dt \vec{u}}{dt} = m(t)\vec{g}$

Finalement, $\boldsymbol{m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + D_m\vec{u} = m(t)\vec{g}}$

3 & 4) La fusée décolle si la force de poussée $\boldsymbol{F = D_m u} > mg$; $\frac{m}{I_s}u = mg \iff \boldsymbol{I_s = \frac{u}{g}}$

5 & 6) $\int_0^{v(t)} dv = -\int_{m_0}^{m(t)} u\frac{dm}{m} - \int_0^t g dt \iff v(t) = \boldsymbol{u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - gt}$ $\quad$ puis $\quad \Delta v = \boldsymbol{u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)}$

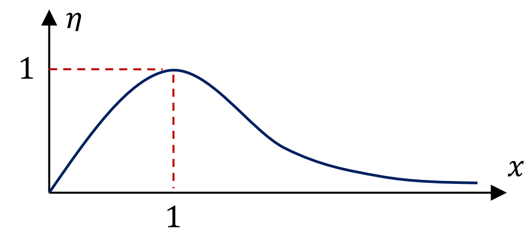
7) $(\Delta v)_1 = \boldsymbol{u \ln\left(\frac{134}{34}\right) = 5{,}49\ km.s^{-1}}$ $\quad (\Delta v)_2 = \boldsymbol{u \ln\left(\frac{24}{4}\right) = 7{,}17\ km.s^{-1}}$ $\quad (\Delta v)_{totale} = \boldsymbol{12{,}7\ km.s^{-1}}$

Alors que pour une fusée à un seul étage, $(\Delta v)_{totale} = \boldsymbol{u \ln\left(\frac{134}{14}\right) = 9{,}04\ km.s^{-1}}$

8) $\frac{m_c}{m_u} = e^{\frac{\Delta v}{u}} - 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{m_{c1} = 1{,}25\ t}$ et $\boldsymbol{m_{c2} = 142\ kg}$

9) $dE_c = \frac{1}{2}D_m dt(v-u)^2 \quad \rightarrow \quad P_{jet} = \boldsymbol{\frac{1}{2}D_m(v-u)^2}$ $\quad$ D'autre part, $P_{recue} = \boldsymbol{D_m u\, v}$

10 & 11) La puissance cinétique gagnée par le vaisseau est P_{recue} , alors que celle dépensée sert à mettre en mouvement la fusée **et** le gaz $\left(P_{recue} + P_{jet}\right)$: $\eta = \frac{P_{recue}}{P_{recue} + P_{jet}} = \frac{2uv}{u^2+v^2} = \boldsymbol{\frac{2x}{1+x^2}}$ $\left(\boldsymbol{x = \frac{u}{v}}\right.$ par exemple$)$



Le rendement est maximal pour $\boldsymbol{x = 1}$, le gaz est alors éjecté avec **une vitesse nulle dans le référentiel galiléen**.

Le rendement est nul si le gaz n'est pas éjecté $(\boldsymbol{x = 0})$ ou si la fusée est encore **immobile au décollage** $(\boldsymbol{x} \to \infty)$.

12 & 13) On demande ici la démonstration de "La Formule" du cours sur les machines thermodynamiques en écoulement stationnaire : $\boldsymbol{d(h + e_c) = \delta w' + \delta q = 0}$ (Pas de travail autre que celui des forces de pression en amont et en aval + hypothèse adiabatique). En définitive, $\Delta(\boldsymbol{h + e_c}) = \boldsymbol{0}$

Or, $\Delta h = c_p(T_s - T_c) = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_s - T_c) \sim -\frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}T_c$ et $\Delta e_c = \frac{1}{2}v_s^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v_s = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{M(\gamma-1)}}}$

14) $\boldsymbol{v_s = 3{,}1\ km.s^{-1}}$ $\quad \left(M = M_{H_2O} = 18\ g.mol^{-1}\right) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{I_s = 3{,}2.10^2\ s}$

15) La force essentielle est **la force électrique**, toutes les autres forces sont négligeables : poids, force magnétique $(v_e \ll c)$, force de frottement, interactions coulombiennes …

16) La deuxième loi de Newton appliquée à un électron en régime sinusoïdal permanent donne

$i\omega m_e \underline{\vec{v}_e} = -e\underline{\vec{E}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega m_e}\underline{\vec{E}}}$ $\qquad$ (Si $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant !)

17) La loi locale conservation de la charge est $i\omega\underline{\rho} = -\frac{ne^2}{i\omega\varepsilon_0 m_e}\underline{\rho}$ $\rightarrow$ soit $\omega = \omega_p$ (situation improbable que l'on exclut), soit $\boldsymbol{\underline{\rho} = 0}$ On en déduit $-\vec{\Delta}\,\vec{E} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\,\overrightarrow{rot}\,\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Or $\vec{j} = \varepsilon_0\omega_p^2\int\vec{E}\,dt$ donc $\boldsymbol{\vec{\Delta}\,\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\omega_p^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

On injecte la solution envisagée $\left(\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y\right)$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{c^2}}$

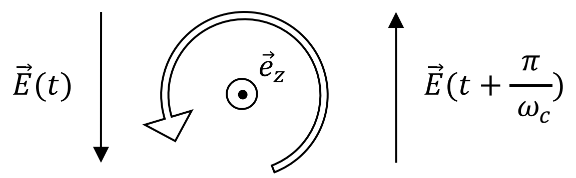
18) Il y a propagation si $\boldsymbol{\omega > \omega_p}$ $(k \in \mathbb{R})$, dans le cas contraire une onde stationnaire amortie s'installe (évanescence $\leftrightarrow$ $\underline{k} \in i\mathbb{R}$)

19) La deuxième loi de Newton appliquée à un électron donnerait : $\boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m_e}\vec{B}_0 \wedge \vec{v} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}}$

Les variations de $\vec{v}$ sont donc perpendiculaires à $\vec{B}$. Si initialement la vitesse est perpendiculaire au champ magnétique alors elle le demeure.

On reconnait la dérivée d'un vecteur en rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega_c = \frac{eB_0}{m_e} = 3,5.10^{10}\ rad.s^{-1}}$.

20) Les électrons tournent autour de $\vec{e}_z$ et le champ électrique est suivant $\vec{e}_y$.



L'isochronisme ($\boldsymbol{\omega_c \sim \omega}$) permet d'accélérer les électrons à chaque demi-tour.

21) $\omega_p < \omega_c$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{n < \frac{\varepsilon_0 B^2}{m_e} = 3,9.10^{17}\ m^{-3}}$

22) $h\frac{\omega}{2\pi} = 3{,}7.10^{-24}\,J \ll 12\ eV$: Les photons micro-onde **ne peuvent pas ioniser** les atomes de Xénon.

23-25) $\boldsymbol{D_m = \frac{\mu I}{e}}$ On applique le théorème de l'énergie cinétique à un ion : $\frac{1}{2}\mu u^2 = eV_a$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}}}$

Finalement, $F = D_m u = \boldsymbol{I\sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}}} = j\pi\frac{D^2}{4}\sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}} = \boldsymbol{\frac{2\pi\varepsilon_0 D^2 V_a^2}{9d^2}}$

26) $\boldsymbol{F = 4,26.10^{-3}\ N}$ (On n'oublie pas de multiplier par N) $\boldsymbol{u = \sqrt{\frac{2e\mathcal{N}_A V_a}{M}} = 32,1\ km.s^{-1}}$

$D_m = \frac{F}{u} = 1{,}33.10^{-7}\ kg.s^{-1}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{m_{90j} = 1,03\ kg}$ $\boldsymbol{P_{\rightarrow jet} = \frac{1}{2}D_m u^2 = 68,5\ W}$

27) Neutraliser le jet permet d'éviter les interactions Coulombiennes répulsives qui tendraient à faire diverger le faisceau d'ions. De plus, le vaisseau se chargerait négativement, les cations feraient demi-tour !

28) La deuxième loi de Newton appliquée au satellite sur une orbite circulaire donne : $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$

Il en résulte que $\boldsymbol{E_m} = \frac{1}{2}m_s v^2 - \frac{\mathcal{G}M_T m_s}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m_s}{2r} = \boldsymbol{-E_c}$.

En cas de freinage faible, l'énergie mécanique diminue mais la trajectoire reste à peu près circulaire :

$E_c = -E_m$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\Delta E_c = -\Delta E_m} > 0$ Le satellite tombe légèrement et sa vitesse augmente.

29 & 30) $\boldsymbol{\Delta E_m} = -\boldsymbol{\frac{\mathcal{G}M_T m_s}{2(R_T+h)^2}\Delta h = -22,4\ kJ}$ Or la période de révolution est $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{\mathcal{G}M_T}} = 5{,}42.10^3\ s$

donc la puissance mécanique perdue vaut environ $\boldsymbol{4,1\ W}$.

La puissance reçue par le satellite est d'après la question 9 égale à $\boldsymbol{D_m u\, v = 33\ W}$ **: C'est suffisant**