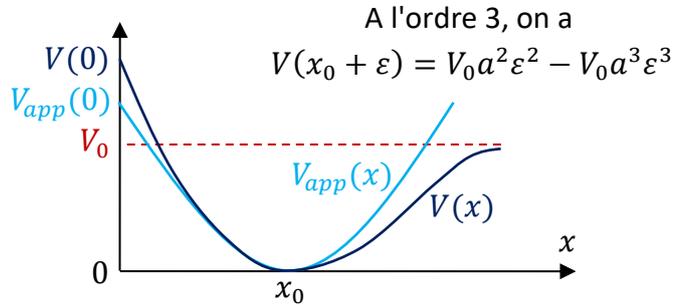
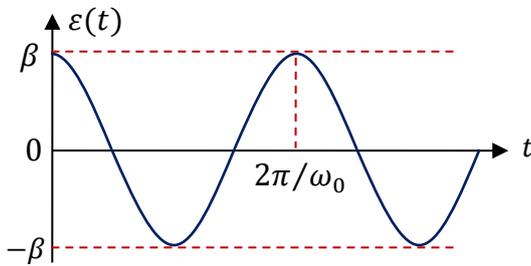


1-4)  $V'(x_{eq}) = 0 \rightarrow x_{eq} = x_0$  Au voisinage de  $x_0$ ,  $V(x_0 + \varepsilon) = V''(x_0) \frac{\varepsilon^2}{2}$

Or  $V'(x_0 + \varepsilon) = 2V_0 a (\exp(-a\varepsilon) - \exp(-2a\varepsilon)) \rightarrow V''(x_0 + \varepsilon) = 2V_0 a^2 (2 \exp(-2a\varepsilon) - \exp(-a\varepsilon))$

Donc finalement  $V(x_0 + \varepsilon) = 2V_0 a^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \rightarrow k = 2V_0 a^2 \rightarrow \omega_0 = a \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$



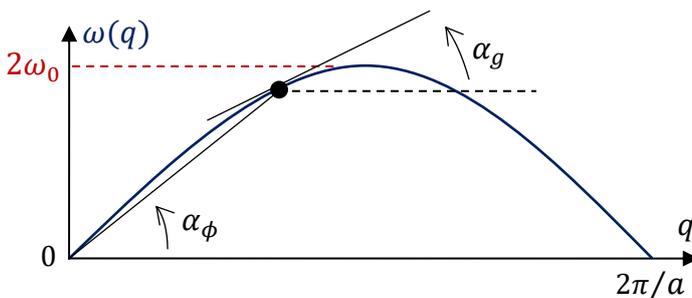
$V(0) = V_0(1 - \exp(ax_0))^2 > V_{app}(0) = V_0 a^2 x_0^2$

5-6)  $x_n(0) = na \rightarrow u_n(t) = x_n(t) - na$  La 2<sup>ème</sup> loi de Newton appliquée à la masse  $n$ , projetée sur  $x$ , donne  $\ddot{x}_n = \ddot{u}_n = -\omega_0^2(x_n - x_{n-1} - a) + \omega_0^2(x_{n+1} - x_n - a) = \omega_0^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$

7) Cette onde est harmonique, de **pulsation**  $\omega$  et **d'amplitude**  $U_0$ .

8) La longueur d'onde est forcément un multiple de  $a$  (?). Les entiers  $p$  et  $n$  vérifient la relation  $q(p - n)a = 2m\pi$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$   $\rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{q}$  ( $m = 1$ ) On reconnaît en  $q$ , la norme du **vecteur d'onde**.

9-10) On injecte la solution proposée dans l'équation et on a  $-\omega^2 = \omega_0^2(\exp(-iqa) + \exp(iqa) - 2) \rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos(qa)) = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \rightarrow \omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right|$



Graphiquement,  $v_\phi = \tan(\alpha_\phi)$  et  $v_g = \tan(\alpha_g)$

La vitesse de phase est  $v_\phi = \omega/q$  C'est la vitesse de propagation d'un point de phase donnée :  
Si  $\omega t - qna = \omega(t + \Delta t) - q(na + a\Delta n)$ , alors  $v_\phi = a\Delta n/\Delta t$

La vitesse de groupe est  $v_g = d\omega/dq$  Dans le cas d'un paquet d'ondes à spectre étroit, c'est la vitesse de déplacement de l'enveloppe du paquet.

11) La chaîne est **dispersive** car ces deux vitesses diffèrent. En d'autres termes,  $v_\phi$  n'est pas constante. Elle se comporte comme un filtre **passé-bas** de fréquence de coupure  $2\omega_0$  ( $\omega < 2\omega_0$ ).

12) Pour  $q \ll \frac{\pi}{a}$  (en fait  $\omega \ll \omega_0$ ),  $v_\phi = v_g = a\omega_0$  Le milieu est **non dispersif**, toutes les ondes sinusoidales se propagent à la même célérité, un paquet d'onde se propage **sans déformation**.

Pour  $q = \frac{\pi}{a}$  (en fait  $\omega = 2\omega_0$ ),  $v_\phi = \frac{2a\omega_0}{\pi}$  et  $v_g = 0$  Deux atomes successifs oscillent en opposition de phase ( $\lambda = 2a$ ), il n'y a plus de propagation. On reconnaît une onde **stationnaire** liée à une résonance.

**13)** Le terme positif  $A/x^{12}$  correspond à la **répulsion des nuages électroniques** à très courtes distances. L'autre terme correspond à l'**attraction de van der Waals** entre dipôles, dominante à grande distance.

**14)**  $V'(a) = 0 \rightarrow 2A = Ba^6 \rightarrow V(x) = \frac{Ba^6}{2x^{12}} - \frac{B}{x^6} \rightarrow \Theta_0 = \frac{B}{2a^6}$

**15)** La courbe 2 représente la **fonction monotone la plus rapide** donc c'est la courbe  $\left[\frac{x}{a} \rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^{12}\right]$ .

La courbe 3 représente l'autre fonction monotone plus lente, on reconnaît donc la courbe  $\left[\frac{x}{a} \rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^6\right]$ .

**16-17)** On pose  $\epsilon = x - a$  Au voisinage de  $a$ ,  $V(a + \epsilon) = V''(a) \frac{\epsilon^2}{2}$

Or  $V'(a + \epsilon) = 12\Theta_0 \left(-\frac{a^{12}}{(a + \epsilon)^{13}} + \frac{a^6}{(a + \epsilon)^7}\right) \rightarrow \tilde{V}''(a + \epsilon) = 12\Theta_0 \left(13\frac{a^{12}}{(a + \epsilon)^{14}} - 7\frac{a^6}{(a + \epsilon)^8}\right)$

Donc finalement,  $V(a + \epsilon) = \frac{72\Theta_0}{a^2} \frac{\epsilon^2}{2} \rightarrow k = \frac{72\Theta_0}{a^2} = 29 \text{ N.m}^{-1} \rightarrow \omega_0 = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$

**18)**  $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{m}{2} \langle \dot{u}_n^2 \rangle = \frac{m\omega^2 U_0^2}{4} \rightarrow \langle \mathcal{E}_c^N \rangle = \frac{Nm\omega^2 U_0^2}{4}$

**19-20)** L'énergie potentielle élastique de chaque liaison est partagée par deux atomes :

$\langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{k}{4} \langle (x_n - x_{n-1} - a)^2 + (x_{n+1} - x_n - a)^2 \rangle = \frac{k}{4} (\langle (u_n - u_{n-1})^2 \rangle + \langle (u_{n+1} - u_n)^2 \rangle)$

On relève une erreur d'énoncé (une faute de signe) et une maladresse (l'absence de la division par deux).

$\langle \mathcal{E}_p \rangle = k \sin^2 \left(\frac{qa}{2}\right) U_0^2 \left(\langle \sin^2 \left(\omega t - \frac{(2n-1)qa}{2}\right) \rangle + \langle \sin^2 \left(\omega t - \frac{(2n+1)qa}{2}\right) \rangle\right) = m\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{qa}{2}\right) U_0^2 = \frac{m\omega^2 U_0^2}{4}$

On reconnaît l'équipartition de l'énergie ( $\langle \mathcal{E}_c \rangle = \langle \mathcal{E}_p \rangle = \frac{k_B T}{2}$ )

**21)** Pour  $N$  atomes dans une maille cubique à trois dimensions,  $U = 3N\langle \mathcal{E}_c \rangle + 3N\langle \mathcal{E}_p \rangle = 3Nk_B T$

**Loi de Dulong et Petit**

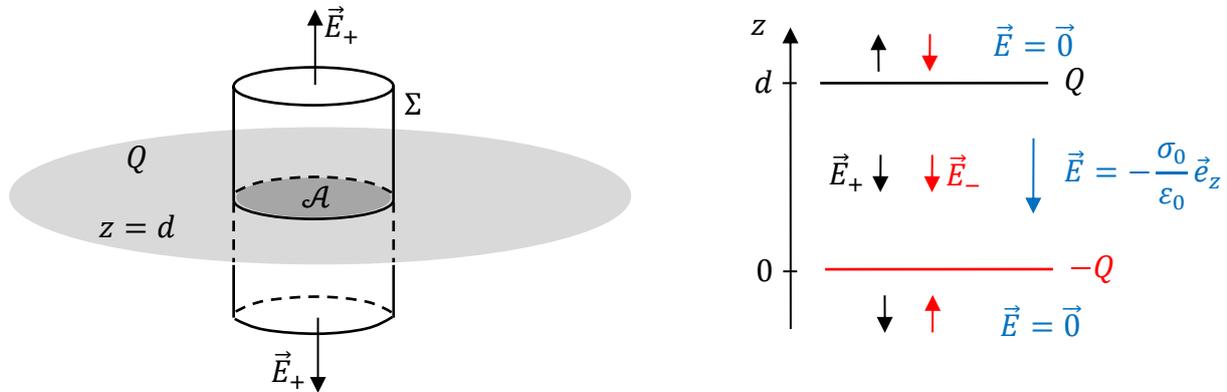
**22)**  $\lambda = \frac{2\pi}{q} = \pi a / \arcsin \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) = 6,8 \text{ mm} \gg a$  Cela justifie le passage au continu.

**23)** On reconnaît la célérité de l'onde écrite sous la forme  $a\omega_0 = 3,4 \text{ km.s}^{-1}$

$$\rightarrow u(t) = - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} - \frac{Q}{S\epsilon} dz = \frac{Q(t)e}{S\epsilon} \propto F_0 \propto D^3 \text{ pour } 0 < t < \tau$$

**24)** Quel que soit le point  $M$  dans l'espace  $0 < z < d$ , tous les plans contenant l'axe  $(Mz)$  sont **des plans de symétrie pour la distribution** donc ce sont des plans de symétrie pour  $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$  leur appartient.

On applique le théorème de Gauss **séparément** pour chaque disque. On choisit une surface de Gauss  $\Sigma$  cylindrique, orthogonale au disque et fermée par deux disques d'aire  $\mathcal{A}$ . Elle est disposée de façon symétrique car chaque disque est un plan de symétrie pour la distribution donc un plan de symétrie pour  $\vec{E}$



Le flux sortant de  $\vec{E}_+$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  est égale à la charge contenue dans  $\Sigma$  divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\text{Pour } z > d, 2\mathcal{A}E_+(z) = \frac{\mathcal{A}\sigma_0}{\epsilon_0} \rightarrow E_+(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \quad \text{et} \quad E_+(z) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \quad \text{pour } z < d$$

$$\text{De même pour le sol (au signe près !)} \quad E_-(z) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \quad \text{pour } z > 0 \rightarrow \vec{E}(M) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\mathbf{25-26)} \quad \vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z \rightarrow \frac{dV}{dz} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rightarrow U_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}d \quad E = \frac{U_0}{d} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \sigma_0 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

**27)** Une telle tension engendrerait un arc électrique si l'épaisseur de la couche d'air non chargé était réduite à 3 cm. Ce n'est apparemment pas le cas ici, le risque est donc écarté.

**28-29)**  $E_0 = -\frac{U_0}{d}$  Les équations de Maxwell sont composées de deux équations de liaisons aux sources (1) & (2) et de deux équations intrinsèques de structure (3) & (4) :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (3) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

**30)** D'après l'équation de Maxwell-Ampère (2), il existe un champ  $\vec{B}$  dont le rotationnel est non nul.

La distribution est **invariante par rotation** autour de  $(Oz)$  donc  $\vec{B}(r, z, t)$ .

De plus, le champ magnétique est **orthogonal aux plans de symétrie** évoqués plus haut,  $\vec{B} = B(r, z, t)\vec{e}_\theta$

[Dans la question suivante, on reviendra sur la présence de  $r$  dans les variables ...]

**31)** D'après le théorème de Stokes, la circulation de  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé est égale au flux du rotationnel de  $\vec{B}$  à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur ce contour :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{On reconnaît } \Phi_{\vec{E}} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}, \text{ le flux du champ électrique.}$$

On remarque en effet que même en présence d'un champ électrique uniforme, le champ magnétique dépendra de  $r$  ( $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  proportionnelle à  $r$  alors que  $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  proportionnel à  $r^2$ ).

**32-33)**  $\mathcal{E}_p = eU(r)$  D'après la loi statistique de Boltzmann, à haute température ( $k_B T \gg e|U|$ ),

le nombre d'ions  $dN$  en  $r$  à  $dr$  près est égal à  $4\pi r^2 dr A \exp\left(-\frac{eU(r)}{k_B T}\right) \sim 4\pi r^2 dr A \left(1 - \frac{eU(r)}{k_B T}\right)$

Le nombre d'ions par unité de volume est donc  $n_+(r) = \frac{dN}{4\pi r^2 dr} = A \left(1 - \frac{eU(r)}{k_B T}\right)$

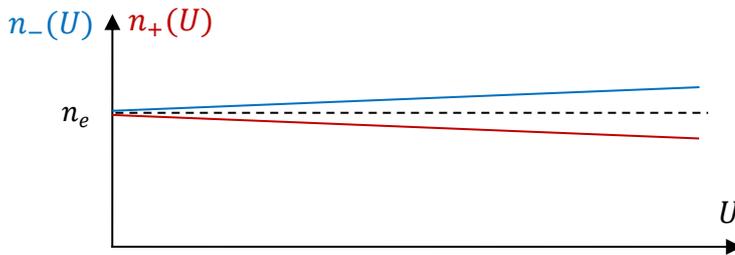
Avec  $A = n_+(\infty) = n_e$  car alors  $U \rightarrow 0$

On obtient bien la relation  $\frac{n_+(r)}{n_e} = 1 - \frac{eU(r)}{k_B T}$

[On remarque l'intérêt de raisonner en termes de densité volumique afin d'esquiver la difficulté liée à la dégénérescence. Indépendamment du facteur de Boltzmann, plus  $r$  grandit, plus le nombre d'ions grandit.]

**34-37)** De façon antisymétrique,  $\frac{n_-(r)}{n_e} = 1 + \frac{eU(r)}{k_B T}$

Equation de Poisson :  $\Delta U + \frac{n_+ - n_-}{\epsilon_0} e = 0$



$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rU) - \frac{2e^2 n_e}{k_B T \epsilon_0} U = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{2e^2 n_e}{k_B T \epsilon_0} Z = 0 \rightarrow \lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T \epsilon_0}{2e^2 n_e}}$$

**38)**  $Z(r) = A \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + B \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right)$  A grande distance, l'influence de l'ion est négligeable  $\rightarrow B = 0$

A proximité de l'ion, le potentiel est celui créé par **une charge ponctuelle**  $\rightarrow A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$

En s'éloignant de l'ion, le potentiel diminue plus vite que celui créé par une charge ponctuelle du fait de l'influence de  $\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$ . On parle alors de **potentiel écranté** (par le plasma).

D'un point de vue symétrique,  $\lambda_D$  s'apparente à une **distance caractéristique** de l'influence de l'ion sur le plasma. Au bout de quelques  $\lambda_D$ , le plasma ne "perçoit" plus son existence. Cette distance augmente avec la température car l'écrantage est alors moins efficace, le plasma réagit de façon plus désordonnée.

**39)**  $\rho(r \neq 0) = -\frac{e}{4\pi\lambda_D^2 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \rightarrow Q(r) = \underbrace{e}_{Q(0)} + \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = e \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$

Erreur d'énoncé :  $\int_0^r x \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) dx = \lambda_D^2 \left(1 - \left(\frac{r}{\lambda_D} + 1\right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)\right)$

40)  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  L'unité de  $\gamma$  est  $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  car l'unité de  $j$  est "A. m<sup>-2</sup>" et celle de  $E$  "V. m<sup>-1</sup>".

Autrement,  $[\gamma] = [j]/[E] = I \cdot L^{-2} / \left( \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{I \cdot T} / L \right) = I^2 \cdot T^3 \cdot M^{-1} \cdot L^{-3}$

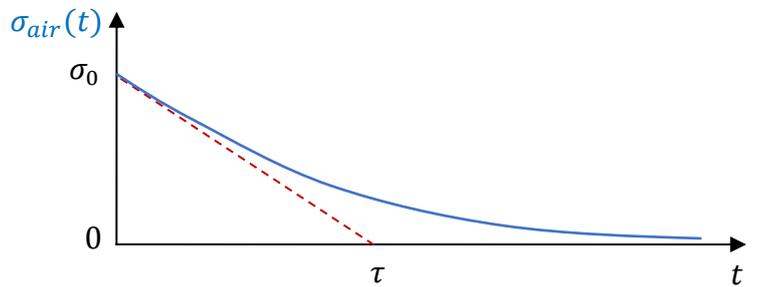
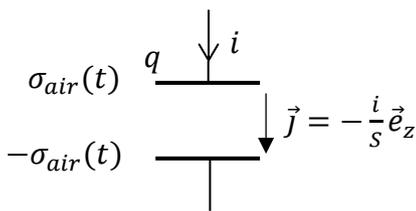
41) L'air entre les plaques reste localement neutre, cela implique qu'à chaque instant

$$\sigma_{air}(t) = -\sigma_{sol}(t) \rightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \frac{\sigma_{air}(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

42-44) En fait, on étudie ici la décharge d'un condensateur mais en se concentrant exceptionnellement sur le courant entre les armatures. D'après l'expression classique " $i = \frac{dq}{dt}$ ", on en déduit que  $\vec{j} = \frac{d\sigma_{air}}{dt} \vec{e}_z$ .

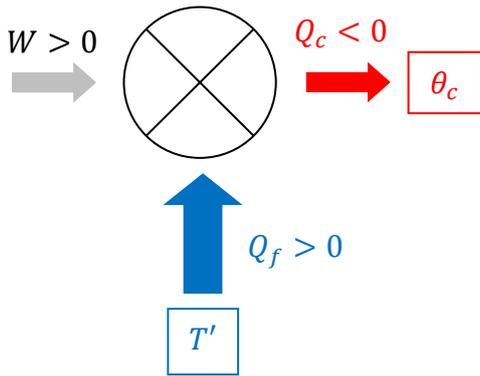
Ainsi,  $\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \gamma \frac{\sigma_{air}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = 8,9 \cdot 10^{-32} \text{ s}$  et  $j_0 = \frac{\sigma_0}{\tau} = 1,1 \cdot 10^{39} \text{ A} \cdot m^{-2}$

[Valeurs ahurissantes dues à une conductivité fantaisiste ?]



45-48)  $\frac{\delta Q_f}{T'} + \frac{\delta Q_c}{\theta_c} = 0$

$\delta Q_f + \delta Q_c + \mathcal{P}dt = 0 \rightarrow \delta Q_f \left(1 - \frac{\theta_c}{T'}\right) + \mathcal{P}dt = 0$



Or, d'après le premier principe **appliqué à l'eau de mer**,  $\delta Q_f = -mc_{eau}dT' > 0$  (Changement de système !)

Ainsi,  $\mathcal{P}\Delta t = mc_{eau} \left( T_f - \theta_c \left( 1 + \ln \left( \frac{T_f}{\theta_c} \right) \right) \right)$

$\mathcal{P}_{min} = \frac{mc_{eau}}{\Delta t_{max}} \left( T_f + \theta_c \left( \ln \left( \frac{\theta_c}{T_f} \right) - 1 \right) \right) = 5,0 \text{ kW}$

49-50) Les deux principes appliqués à  $\mathcal{S}$  donnent dorénavant la relation  $\delta Q_f \left(1 - \frac{\theta_c}{T_f}\right) + \mathcal{P}_{min}dt = 0$

Toujours d'après le premier principe **appliqué à l'eau de mer**,  $\delta Q_f = -(-L_{fus} \delta m) > 0$  avec  $\delta m$  la masse élémentaire d'eau se transformant en glace pendant  $\delta t$ .

$\Delta t' = \frac{mL_{fus}}{\mathcal{P}_{min}} \left( \frac{\theta_c}{T_f} - 1 \right) = 82 \text{ mn}$

$\eta = \frac{Q_f}{W} = m \frac{L_{fus} + c_{eau}(\theta_c - T_f)}{\mathcal{P}_{min}(\Delta t + \Delta t')} = 15$

51-52)  $S(j_Q(x) - j_Q(x + dx)) + \sigma Sdx = 0 \rightarrow \frac{dj_Q}{dx} = \sigma = 0$  ici ( $\sigma \neq 0$  qu'en  $x = L$ )

53) Le vecteur  $\vec{j}_Q$  est dirigé vers la gauche et son flux (constant et uniforme) correspond en  $x = 0$  à  $\mathcal{P}'$  et en  $x = D(t)$  à la puissance libérée lors de la glaciation, c'est-à-dire  $\mu_{glace} S \frac{dD}{dt} L_{fus} \rightarrow v_0 = \frac{\mathcal{P}'}{\mu_{glace} S L_{fus}}$

$v_0 = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow \mathcal{P}' = 27 \text{ MW}$



Situation Q51-53



Situation Q54-56 (à priori !)

54) L'unité du coefficient  $h$  est  $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$

Plus le pont de glace est long, moins la puissance  $\mathcal{P}''$  sera grande, moins la vitesse sera grande.

55-56)  $S(j_Q(x) - j_Q(x + dx)) + \sqrt{S}dx h(\theta_c - T(x)) = 0 \rightarrow \frac{dj_Q}{dx} = \frac{h}{\sqrt{S}}(\theta_c - T(x)) > 0$  ( $j_Q < 0$  !)

En suivant les conseils de l'énoncé, sans trop y croire, on a envie d'écrire que  $\frac{dj_Q}{dx} \sim \frac{h}{\sqrt{S}}(\theta_c - T_f)$

$\rightarrow j_Q(x) = \frac{h}{\sqrt{S}}(\theta_c - T_f)x - \frac{\mathcal{P}'}{S} \rightarrow j_Q(D) = \frac{h}{\sqrt{S}}(\theta_c - T_f)D - \frac{\mathcal{P}'}{S}$  Or  $j_Q(D) = -\mu_{glace} \frac{dD}{dt} L_{fus}$

$\rightarrow v' = \frac{\mathcal{P}'}{\mu_{glace} S L_{fus}} - \frac{hD(\theta_c - T_f)}{\mu_{glace} L_{fus} \sqrt{S}} = v_0 - v_a$  Si on veut  $\frac{\mathcal{P}''}{\mu_{glace} S L_{fus}} - \frac{hD(\theta_c - T_f)}{\mu_{glace} L_{fus} \sqrt{S}} = v_0$

Il faut que  $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}' + hD(\theta_c - T_f)\sqrt{S}$  Lorsque  $D = 50 \text{ km}$ ,  $\mathcal{P}'' - \mathcal{P}' = 1,3 \text{ MW}$  (+5 %)