

1) Cela signifie que le point M se trouve dans la zone de rayonnement ($a \ll \lambda \ll r$)

2) Le plan méridien ($M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) est un plan de symétrie pour la distribution (il contient le dipôle) donc c'est un plan d'antisymétrie pour $\vec{B} \rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\phi$

3) En un point M donné, on retrouve la structure du trièdre $\vec{B}(M) = \frac{\vec{e}_r(M) \wedge \vec{E}(M)}{c}$ d'une O.P.P. Attention, l'onde n'est ni plane, ni sphérique !

$$4) \vec{\Pi}(M) = \frac{\vec{E}(M) \wedge \vec{B}(M)}{\mu_0} = \frac{e^2 d^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right)^2 \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e}_r$$

$$5) \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{e^2 d^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2 d^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

6) On en déduit l'énergie moyenne temporelle (!) rayonnée par l'électron, c'est-à-dire $\mathcal{P}_L = \frac{e^2 d^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$

$$7) \langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle = \frac{d^2 \omega^4}{2} \rightarrow \mathcal{P}_L = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \langle \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} \rangle \rightarrow [K_e] = \left[\frac{e^2}{\epsilon_0}\right] \cdot T^3 \cdot L^{-3} = M \cdot L^3 \cdot T^{-2} \cdot T^3 \cdot L^{-3} = M \cdot T \quad (\text{kg} \cdot \text{s})$$

$$8) \mathcal{P}_{ray} = K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \cdot \vec{v} = K_e \frac{d^3 \vec{OP}}{dt^3} \cdot \frac{d\vec{OP}}{dt} = -K_e d^2 \omega^4 \sin^2(\omega t) \rightarrow \langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = -\frac{K_e d^2 \omega^4}{2}$$

9 & 10) D'après le P.F.D. $m_e \ddot{z} = -m_e \omega_0^2 z + K_e \ddot{z} \rightarrow \tau \ddot{z} = \ddot{z} + \omega_0^2 z \rightarrow i\tau \Omega^3 = \Omega^2 - \omega_0^2$

11) $\exp(i\Omega t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \exp(\pm i\omega_0 t)$ Dans le cadre de cette approximation (système peu amorti), le temps τ_0 représente la moitié de la durée caractéristique d'atténuation du mouvement.

12) On se place en coordonnées sphériques (r, θ, φ). La distribution étant invariante par rotation selon θ et φ , la norme du champ ne dépend que de r . Tous les plans contenant \vec{OP} sont des plans de symétrie pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ $\rightarrow \vec{E}(P) = E(r) \vec{e}_r$

On applique le théorème de Gauss sur une sphère centrée en O et de rayon $r < a_0$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\rho\pi r^3}{3\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \rightarrow \vec{E}(P) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} r \vec{e}_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{OP}$$

$$13) \vec{f}_{rappel} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3} \vec{OP} \rightarrow \omega_0 = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_0^3 m_e}} = 4,14 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 45,6 \text{ nm}$$

Cela correspond au domaine spectral de l'ultraviolet.

14) D'après le P.F.D. $m_e \ddot{z} = -m_e \omega_0^2 z + K_e \ddot{z} - eE_0 \cos(\omega t) \rightarrow \tau \ddot{z} = \ddot{z} + \omega_0^2 z + \frac{eE_0}{m_e} \exp(i\omega t)$

$$\rightarrow \underline{z} = \frac{eE_0/m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\tau\omega^3} \exp(i\omega t) \rightarrow \underline{\dot{z}} = -\frac{eE_0\omega^2/m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\tau\omega^3} \exp(i\omega t) \vec{e}_z$$

$$15) \mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}_L(\omega) = \frac{K_e}{2} \frac{e^2 E_0^2 \omega^4 / m_e^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau^2 \omega^6} \rightarrow \mathcal{P}_0 = \frac{K_e e^2 E_0^2}{2m_e^2 \tau^2 \omega_0^2} = \frac{e^2 E_0^2 \tau_0}{2m_e}$$

Pour $\omega \ll \omega_0$ (et $\omega^6 \ll \omega_0^4/\tau^2$), $\mathcal{P}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 \tau^2 \omega^4}{\omega_0^2} \rightarrow 0$ lorsque $\omega \rightarrow 0$

Pour $\omega \gg \omega_0$ (et $\omega^2 \gg 1/\tau^2$), $\mathcal{P}(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 \omega_0^2}{\omega^2} \rightarrow 0$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$

16) En effet, puisque $\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}_0 \frac{\omega_0^2/\omega^2}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\tau\omega^3}\right)^2 + 1}$, l'indication n'est pas surprenante !

La fonction $g(\omega)$ est maximale (et vaut 1) en $\omega = \omega_0$

Aux pulsations de coupure, la puissance est égale à la moitié de la puissance maximale \mathcal{P}_0 . On en déduit que $g(\omega_c) = \frac{1}{2} \rightarrow \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 \pm \omega_0 \tau} \sim \omega_0 \pm \frac{\omega_0^2 \tau}{2} \rightarrow \Delta\omega \sim \omega_0^2 \tau \rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \sim \frac{1}{\omega_0 \tau} \gg 1$ (très sélectif)

$$\tau = \frac{K_e}{m_e} = 6,32 \cdot 10^{-24} \text{ s} \rightarrow \Delta\omega \sim 1,1 \cdot 10^{10} \text{ rad. s}^{-1} \text{ et } Q \sim 3,8 \cdot 10^6$$

17) La variable n est le nombre choisi de **points** avec lesquels la courbe sera tracée.

La plage de valeurs de ω est $[4 \cdot 10^{15} - 10^8, 4 \cdot 10^{15} + 10^8]$ (rad. s⁻¹)

Celle-ci **permettra** la visualisation de la bande passante car $\Delta\omega \sim \omega_0^2 \tau = 10^8 \text{ rad. s}^{-1}$

La liste X est constituée des n valeurs de ω nécessaires au tracé.

18) $h(\omega) = g(\omega) - \frac{1}{2}$ Le rôle de ces deux lignes est d'indiquer qu'il n'y a pas de solution unique dans l'intervalle $[a, b]$ si $h(a)$ et $h(b)$ sont de même signe.

La précision est $\pm 10^6$ ($\omega_1 = 4 \cdot 10^{15} - 51 \cdot 10^6 \pm 10^6$ et $\omega_2 = 4 \cdot 10^{15} + 50 \cdot 10^6 \pm 10^6$)

La bande passante $\Delta\omega = 1,01 \cdot 10^8 \pm 2 \cdot 10^6 \text{ rad. s}^{-1} \rightarrow Q \sim 4 \cdot 10^7$

19) Le paramètre d est la fonction dérivée $f'(x)$. L'expression A correspond donc à l'écriture de $g'(x)$:

$$4 * x * (\omega_0^2 - x^2) / (\tau^2 * \omega_0^6) / (1 + ((\omega_0^2 - x^2) / \tau * \omega_0^3)^2)^2$$

L'expression B est $x = x_1$

$$20 \& 21) \vec{E}(x, t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z \quad \vec{B}(x, t) = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_y$$

$$\langle e_e \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \quad \langle e_m \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \rightarrow \langle e_{em} \rangle = 2\langle e_e \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \rightarrow \delta E = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}$$

$$22) m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow im_e\omega \vec{v} = -e\vec{E} \rightarrow m_e\omega \delta v = e \delta E \text{ (En amplitude)} \quad \delta \mathcal{E}_c = \frac{m_e}{2} (\delta v)^2 = \frac{e^2 \hbar}{2m_e \epsilon_0 V \omega}$$

23) Dorénavant, \mathcal{P}_{ray} désigne la **valeur absolue** de la puissance moyenne de \vec{f}_{ray} .

$$\mathcal{P}_{ray} = |\langle \vec{f}_{ray} \cdot \vec{v} \rangle| = K_e \omega^2 \langle v^2 \rangle = \frac{K_e \omega^2}{2} (\delta v)^2 = \frac{K_e \omega^2}{m_e} \delta \mathcal{E}_c = \frac{\delta \mathcal{E}_c}{\tau_0}$$

Il y a "équilibre" si le déplacement moyen des niveaux d'énergie cinétique s'effectue sur une durée τ_0 .

$$24) \delta \mathcal{E}_{c,tot} = \frac{e^2 \hbar}{2m_e \epsilon_0 V (\omega_+ - \omega_-)} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{e^2 \hbar}{2m_e \epsilon_0 V (\omega_+ - \omega_-)} \ln\left(\frac{\omega_+}{\omega_-}\right)$$

$$25) \omega_+ = \frac{m_e c^2}{\hbar} \text{ et } \omega_- = \frac{20R_Y}{\hbar} = 10\alpha^2 \omega_+ = \frac{10}{137^2} \omega_+ \ll \omega_+ \rightarrow \delta \mathcal{E}_{c,tot} \sim \frac{e^2 \hbar}{2m_e \epsilon_0 V \omega_+} \ln\left(\frac{1}{10\alpha^2}\right)$$

La constante a pour expression $\frac{e^2 \hbar}{4^4 \pi m_e^2 \epsilon_0 c^2 \alpha_0^3} \ln\left(\frac{1}{10\alpha^2}\right) = 258 \text{ GHz}$ On est loin du compte !

On pourrait améliorer le modèle en ne faisant pas du semi-classique mais plutôt en utilisant la notion de fonction d'onde et son équation, l'équation de Schrödinger ... (!)

26) Seule la densité de probabilité de présence $|\Psi_{ns}|^2$ est non nulle en $r = 0$.

$$\Delta\mathcal{E}_{12} = -13,6 * 1,6 \cdot 10^{-19} \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 10,2 \text{ eV} \gg 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = hf = \delta\mathcal{E}_{tot}$$

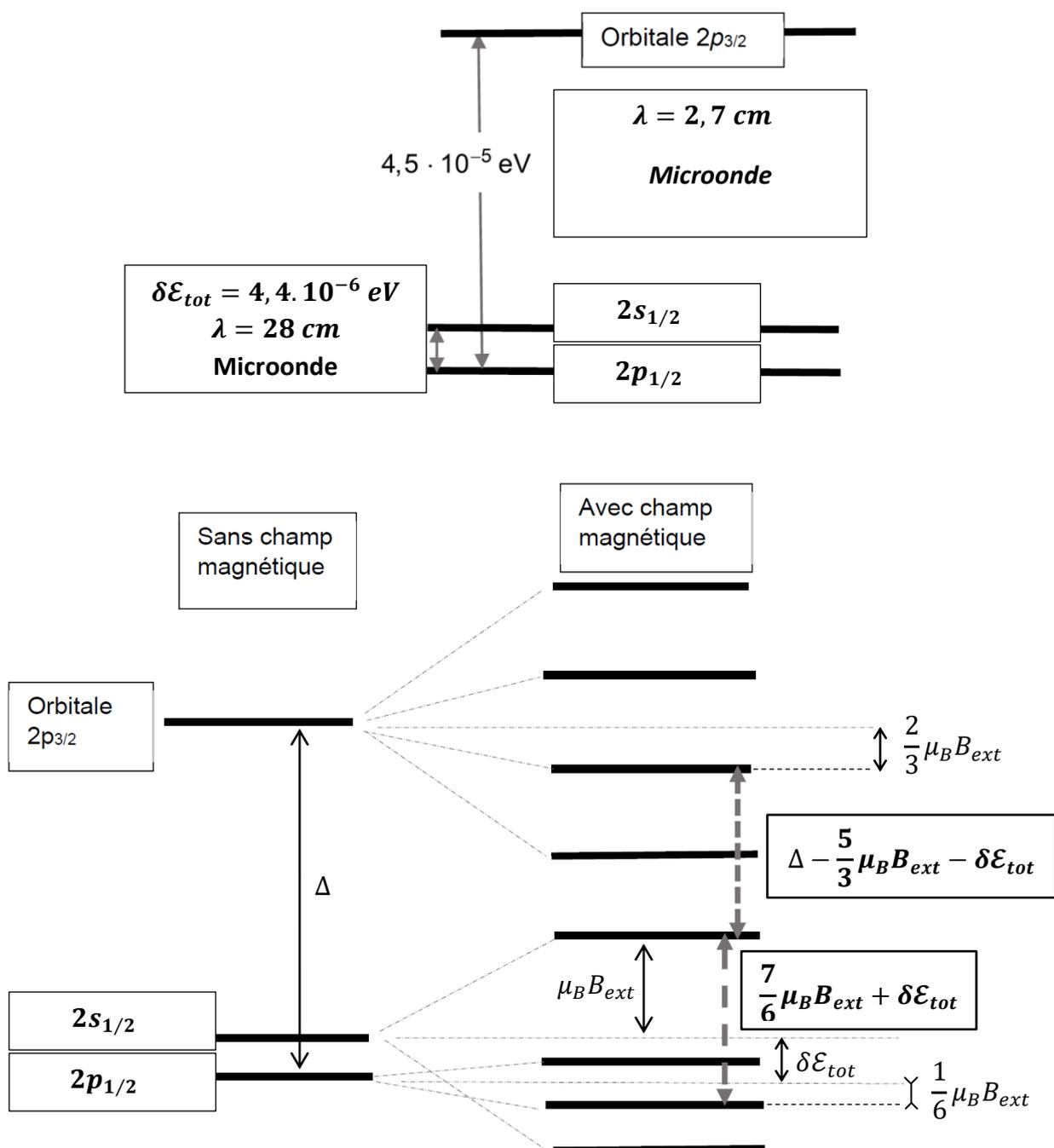
A priori, l'électron 2s n'est pas relativiste ($v_{2s} = \frac{c}{274}$) mais l'extrême finesse énergétique du déplacement de Lamb ($\frac{hf}{\Delta\mathcal{E}_{12}} \sim 10^{-7}$) exige une connaissance et une manipulation précises de la vitesse de l'électron. La correction relativiste permettra d'étudier correctement cette levée de dégénérescence énergétique.

$$\lambda_{Ly\alpha} = \frac{hc}{\Delta\mathcal{E}_{12}} = 122 \text{ nm} \quad \text{Cela correspond, là encore, au domaine spectral de l'ultraviolet.}$$

27) $\lambda = \frac{hc}{\Delta} = 2,7 \text{ cm}$ Cela correspond au domaine spectral des **microondes**.

L'effet de structure fine a pour conséquence le **dédoublment** de la raie α du spectre de Lyman.

28-30) Sur la figure 3, les orbitales concernées sont **2s** ou **2p**, $\lambda = \lambda_{Ly\alpha} = 122 \text{ nm} \rightarrow$ **Ultraviolet**



31) Les expérimentateurs utilisent un champ magnétique de façon à **multiplier les niveaux** d'énergie par effet Zeeman. Ainsi, le niveau le plus stable $2s_{1/2}$ **passé en dessous**, un grand nombre de transitions $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$ et $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}$ sont alors possibles et exploitées.

La fréquence microonde variable est ajustée afin de permettre les différentes transitions. Ils peuvent également faire varier le champ B_{ext} à fréquence constante, se sont alors les niveaux qui se décalent !

Dans tous les cas, si transitions il y a, **l'intensité diminue car le flux d'électrons $2s_{1/2}$ est plus faible** entraînant une baisse du flux d'électrons Auger éjectés de la cible de tungstène.

Les écarts énergétiques étant parfaitement connus à l'exception de $\delta\mathcal{E}_{tot}$, le relevé des fréquences ayant pour conséquence la diminution du courant permet de remonter à la valeur $\delta\mathcal{E}_{tot}$ cherchée.

32) D'après la 2^{ème} loi de Newton, $\vec{\gamma} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e \rho^2} \vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{\rho} \vec{e}_\rho \rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{m_e}{2} v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \rho}$

De plus, $\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \rho} = -2\mathcal{E}_c \rightarrow \mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_c = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \rho}$

33) Il y a une erreur d'énoncé, il manque un carré dans le bilan : $-K_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e \rho^2} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(-\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \rho} \right)$

On reconnaît $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -K_e \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} = -p_L$ Avec p_L , la puissance **instantanée** rayonnée par l'électron.

On procède par **séparation des variables** : $-K_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e \rho^2} \right)^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \rho^2} \frac{d\rho}{dt} \rightarrow dt = -\frac{2\pi\epsilon_0 m_e^2}{K_e e^2} \rho^2 d\rho$

$$\rightarrow \Delta t = \frac{2\pi\epsilon_0 m_e^2}{3K_e e^2} [\rho^3]_{\rho_1}^{\rho_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 m_e^2 a_0^3}{3K_e e^2} (2^6 - 1) = 9,7 \cdot 10^{-10} \text{ s} \sim 10^{-9} \text{ s}$$