D.M. 12 : tirage à pile ou face infini

Pour le lundi 11 mars 2024

Notations : $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

$$H_j = \frac{1}{j!}\prod_{i=0}^{j-1}(X - i).$$

Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On a $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi, $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

I Utilisation de séries entières

Une première formule

1) Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.
2) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.
3) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \qquad ((\text{I}.1))$$

Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

4) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, f_k$ est définie sur $]-1, 1[$.
5) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.
6) Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.
7) Pour tout couple $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.
8) Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k, j) en paramètre et qui renvoie la valeur de $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n, k )` renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
9) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$$

10) À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k.
11) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.
12) Calculer explicitement P_2 et P_3.
13) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.
14) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[, x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.
15) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k + 1 - j$ de P_k.

Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

16) Déterminer R et montrer que, pour tout $x\in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

17) Montrer que, pour tout $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{I.2}$$

18) En déduire que, pour tout $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)$$

19) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} \tag{I.3}$$

II Probabilités

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(Y=k\mid X=n)=\mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

20) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

21) Calculer $\mathbb{P}(Y=0)$ et montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{p}{(1-p)k!}f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right)$$

où f_k est la fonction définie plus haut.

22) Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k)=1$.

23) Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

24) Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de «faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*,[X_n=1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile» et $[X_n=0]$ désigne l'événement «le n-ième lancer donne face».

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

- A_n : «à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces »
- B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces».

25) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

26) Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles.

27) Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

28) On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

29) À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(p(1-p))^n$$

30) On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (I.2)).

31) On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.