D.M. 11 d'après Mines-Ponts 2023 PSI-PC

1) Question de cours.
Sens $\Rightarrow$:
• Supposons S dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$. Pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ on a donc :

$$\langle SX, X\rangle \geqslant 0 \tag{1}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre et $X \neq 0$ un valeur propre associé. (On sait, par théorème spectral que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) \subset \mathbb{R}$).
C'est en particulier le cas pour un vecteur propre X associé à une valeur propre λ de S. Or, pour un tel vecteur : $\langle SX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle$, et : $\langle X, X\rangle > 0$ (en effet X est non nul en tant que vecteur propre) donc par (**??**) : $\lambda \geq 0$.
Ainsi $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$.
• Si en plus $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ alors l'inégalité (**??**) devient une inégalité stricte pour tout $X \neq 0$, donc en particulier $\ker S = \{0\}$ et donc 0 n'est pas valeur propre, et donc $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Sens $\Leftarrow$: on diagonalise S dans une base orthonormée $(E_1, \ldots, E_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son p.s. canonique.
Donc pour tout $X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$, $SX = \sum_{i=1}^{n} x_i S E_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i E_i$.
Donc $\langle SX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ par calcul du p.s. dans une b.o.n. et donc
• si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$, $\langle SX, X\rangle \geq 0$
• si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $X \neq 0$, alors $\langle SX, X\rangle > 0$

2) Soit $t \in [0,1]$, et soit $(A, B) \in (\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R}))^2$. On veut montrer : $tA + (1-t)B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$. Or, pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\langle (tA + (1-t)B)X, X\rangle = t\langle AX, X\rangle + (1-t)\langle BX, X\rangle$$

Comme $t \in [0,1]$, on a aussi $1-t \in [0,1]$. De plus A et B sont dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\langle AX, X\rangle \geqslant 0, \langle BX, X\rangle \geqslant 0$. Donc l'égalité ci-dessus implique :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle (tA + (1-t)B)X, X\rangle \geqslant 0$$

c'est-à-dire : $tA + (1-t)B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$. Ceci vaut pour tout $t \in [0,1]$ et tout $(A, B) \in (\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R}))^2$, donc $\boxed{\mathrm{S}_n^+(\mathbf{R}) \text{ est convexe}}$.
Pour $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, on peut reprendre une partie des calculs ci-dessus. Supposons cette fois-ci : $(A, B) \in (\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R}))^2$. Le calcul ci-dessus montre déjà que $\langle (tA+(1-t)B)X, X\rangle$ est positif pour tout vecteur colonne X, et on veut démontrer que c'est strictement positif pour tout vecteur colonne X non nul. Par contraposée, cela revient à démontrer que si $\langle (tA+(1-t)B)X, X\rangle = 0$, alors $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$. Supposons : $\langle (tA+(1-t)B)X, X\rangle = 0$. D'après le calcul et le raisonnement précédents, on a donc :

$$\underbrace{t\langle AX, X\rangle}_{\geqslant 0} + \underbrace{(1-t)\langle BX, X\rangle}_{\geqslant 0} = 0$$

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc on a : $t\langle AX, X\rangle = 0$, et : $(1-t)\langle BX, X\rangle = 0$. Or soit $t \neq 0$, soit $1-t \neq 0$; supposons par exemple que $t \neq 0$; alors la première égalité ci-avant implique : $\langle AX, X\rangle = 0$, et comme $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ ce n'est possible que si $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$, ce qu'il fallait démontrer. De même si $1-t \neq 0$, Par contraposée :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right\}, \quad \langle (tA + (1-t)B)X, X\rangle > 0$$

Donc $\boxed{\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ est convexe}}$.

En revanche $\mathrm{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ parce qu'ils ne sont pas stables par multiplication externe : ainsi la matrice I_n appartient à ces deux ensembles puisque : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})\backslash\left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right\}, \langle \mathrm{I}_n X, X\rangle = (\|X\|_2)^2 > 0$, mais $-\mathrm{I}_n$ n'y appartient pas puisque, pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})\backslash\left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\right\} : \langle -\mathrm{I}_n X, X\rangle = -\langle \mathrm{I}_n X, X\rangle < 0$. D'où le résultat.

3) On note $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f$ l'épigraphe de f :

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in I \times \mathbf{R} \mid f(x) \leqslant y\}$$

Soient $t \in [0,1]$, et $(x,y), (x',y')$ dans $\mathcal{E}$.
Montrons : $t(x,y)+(1-t)\,(x',y') \in \mathcal{E}$. Comme : $t(x,y)+(1-t)\,(x',y') = (tx+(1-t)x', ty+(1-t)y')$, cela revient à démontrer :

$$f\left(tx+(1-t)x'\right) \leqslant ty+(1-t)y'$$

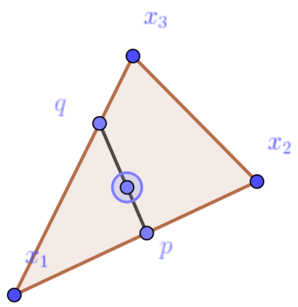
Or f est convexe, donc : $f\left(tx+(1-t)x'\right) \leqslant tf(x)+(1-t)f\left(x'\right)$, et $f(x) \leqslant y, f\left(x'\right) \leqslant y'$, par hypothèse sur (x,y) et (x',y'). Donc finalement :

$$f\left(tx+(1-t)x'\right) \leqslant tf(x)+(1-t)f\left(x'\right) \leqslant ty+(1-t)y'$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^2$,

4) a) On note $H(p)$ la propriété : pour tout $(x_1,\ldots,x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$
On sait que $H(1)$ est triviale et $H(2)$ est vraie par déf. de la convexité.
Soit $p \in \mathbb{N} \geq 2$ tel que $H(p-1)$ est vraie.
Soit $(x_1,\ldots,x_p) \in C^p$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.
Si $\lambda_p = 1$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = x_p \in C$.
Si $\lambda_p \neq 1$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = (1-\lambda)y + \lambda_p x_p$ où $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_p} x_i$.
Mais on remarque qu'en posant $t_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_p}$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} t_i = 1$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i = 1-\lambda_p$.
Donc $H(p-1)$ s'applique à $(x_1,t_1),\ldots,(x_{p-1}t_{p-1})$ pour conclure que $y \in C$.
Mais alors $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = (1-\lambda)y + \lambda_p x_p$ est aussi dans C car y et x_p sont dans C et C est convexe.
Ici $H(p)$ est vraie et la récurrence est établie.
b) Soit $C = Conv(x_1,\ldots,x_p)$. On veut montrer que :
(i) C contient $x_1,\ldots,x_p$
(ii) C est convexe
(iii) Tout ensemble convexe Γ contenant $x_1,\ldots,x_p$ contient C.
Le (i) est évident et (iii) est démontré au a). Reste à montrer le (ii) Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^p \mu_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = \sum_{i=1}^p \mu_i = 1$ et les λ_i, μ_i positifs.
Soit $t \in [0,1]$, on veut montrer que $z := tx+(1-t)y$ vérifie $z \in C$.
Or $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{(} t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i$ et en posant $\nu_i = \lambda_i + (1-t)\mu_i)$, on a bien pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\nu_i \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^p \nu_i = t+(1-t) = 1$.
Donc $z = \displaystyle\sum_{i=1}^p \nu_i x_i \in C$. $\square$

c) L'enveloppe convexe C de trois points non alignés x_1, x_2, x_3 est le triangle T défini par ces trois points (l'intérieur et les bords). ‘ En effet, avec la déf. de la convexité, on sait déjà que C contient les segments $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_1]$ i.e. les trois côtés du triangle.
En outre tout point intérieur du triangle est sur un segment $[p, q]$ avec p, q sur un côté du triangle, et comme p et q sont dans C, tous les segments $[p, q]$ sont dans C.
On vient de montrer $T \subset C$.



Réciproque : si $z \in C$ alors $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ avec les hyp. habituelles sur les λ_i.
Si $\lambda_3 = 1$, alors $z = x_3$.
Sinon on pose $x = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)/(1 - \lambda_3) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2$ on a :
- $x \in [x_1, x_2]$
- $z = (1 - \lambda_3)x + \lambda_3 x_3 \in [x, x_3]$ donc $z \in T$.

5) Par le 3), on sait que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f$ est un ensemble convexe.
Si on applique le 4) a) aux points $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_p, f(x_p))$ qui sont trivialement dans $\mathcal{E}$, on a : $\sum_{i=1}^p \lambda_i (x_i, f(x_i)) = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)\right) \in \mathcal{E}$.
En traduisant ce que signifie cette appartenance à $\mathcal{E}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$$

c'est exactement le résultat demandé.

6) Notons $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$, comptées autant de fois que leurs ordres de multiplicité. Elles sont toutes réelles puisque M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ par le théorème spectral. On sait par ailleurs que l'on a : $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \mu_i$, et : $\det(M) = \prod_{i=1}^n \mu_i$. Ainsi l'inégalité à démontrer équivaut à :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \mu_i\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (\dagger)$$

Si l'un des μ_i est nul, alors l'inégalité est triviale puisque le membre de droite est nul et le membre de gauche positif ou nul (en tant que somme de réels positifs). Il suffit donc de traiter le cas où toutes les valeurs propres sont strictement positives : c'est ce que nous supposons à présent.
Par stricte croissance du logarithme, et prop. algébriques du logarithme. $(\dagger)$ équivaut à :

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(\mu_i) \qquad (\ddagger)$$

Or la fonction logarithme est concave (sa dérivée seconde est $x \mapsto -1/x^2 < 0$ sur $]0, +\infty[$) donc $-\ln$ est convexe et par l'inégalité du 5) (inégalité de Jensen au programme), on sait que $(\ddagger)$ est vraie, d'où la conclusion.

7) a) On rappelle que l'on a : $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(M^\top M\right)}$. Or M est symétrique, donc : $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}$. Pour exprimer cette trace en fonction des valeurs propres de M, diagonalisons M (ce qui est possible grâce au théorème spectral). Soient $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telles que : $M = PDP^{-1}$, et notons $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les coefficients diagonaux de D, qui sont par ailleurs les valeurs propres de M (comptées avec multiplicités). Alors : $M^2 = PD^2P^{-1}$, donc M^2 est semblable à D^2 et on en déduit que ces deux matrices ont même trace. Or les coefficients diagonaux de D^2 sont $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$. On en déduit : $\mathrm{Tr}\left(M^2\right) = \mathrm{Tr}\left(D^2\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$, et donc :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$

b) On reprend les notations de la résolution de la question 6, et on applique l'inégalité admise dans l'énoncé, avec $x_i = \mu_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On obtient, toujours d'après la résolution de la question 6 :

$$2 \max\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right) \left(\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\mu_k - \det(M)^{\frac{1}{n}} \right)^2$$

Simplifions le membre de droite. Remarquons que, si l'on note $P \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que :

$$\begin{aligned}
M &= P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ alors :} \\
M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_n &= P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} - P (\det(M))^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_n P^{-1} \\
&= P \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\det(M))^{\frac{1}{n}} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ & & (\det(M))^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \mu_1 - (\det(M))^{\frac{1}{n}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

On en déduit que $M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_n$ admet pour valeurs propres les $\mu_i - (\det(M))^{\frac{1}{n}}$ (avec les mêmes multiplicités que les μ_i). Donc, d'après la question précédente, comme c'est aussi une matrice symétrique :

$$\left\| M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_n \right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\mu_k - \det(M)^{\frac{1}{n}} \right)^2}.$$

Ainsi, on a montré que :

$$2 \max\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right) \left(\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right) \geqslant \frac{1}{n} \left\| M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_n \right\|_2^2$$

et il reste à majorer $\max\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)$. Pour cela : soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que : $\mu_{i_0} = \max\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right)$. Comme $M \in \mathrm{S}_n^+(\mathbf{R})$, tous les μ_i sont positifs par la question 1, et on en déduit :

$$\max\left(\mu_1, \ldots, \mu_n\right) = \mu_{i_0} = \sqrt{\mu_{i_0}^2} \leqslant \sqrt{\mu_{i_0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \mu_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2} = \|M\|_2$$

d'où :

$$2\|M\|_2\left(\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n}-(\det(M))^{\frac{1}{n}}\right)\geqslant\frac{1}{n}\left\|M-(\det(M))^{\frac{1}{n}}\mathrm{I}_n\right\|_2^2$$

et on en déduit l'inégalité voulue après division par $2\|M\|_2>0$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que M est non nulle).

8) a) Sens $\Leftarrow$ facile. Si $A=M^\top.M$ alors par prop. de la transposée d'un produit $A^\top=(M^\top.M)^\top=M^\top.(M^\top)^\top=A$ donc $A\in S_n(\mathbb{R})$.
Et pour tout $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top M^\top MX=(MX)^\top.(MX)=\|MX\|^2\geq 0$.
Sens$\Rightarrow$: par thme spectral. $A=PDP^{-1}$ avec $P\in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à diagonale positive. Donc on a aussi $P^{-1}=P^\top$ et si on note $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $\Delta=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$, on peut écrire $D=\Delta^2=\Delta^\top.\Delta$. Alors
(M1) $A=P\Delta\Delta^\top P^\top=M.M^\top$ avec $M=P\Delta$.
(M2) On prend $M=P\Delta P^{-1}=P\Delta P^\top$. Alors $M^2=A$ et $M^\top=M^\top$ donc $A=M^2=M^\top M$.
b) Suivant l'indication, on considère une matrice M telle que $A=M^\top.M$, qui existe par a).
Comme ici A est inversible, on sait que M est aussi inversible (par exemple car $\det(A)=\det(M)^2$).
On peut donc considérer la matrice $S=(M^\top)^{-1}BM^{-1}=(M^{-1})^\top.B.M^{-1}$.
Comme B est symétrique, on vérifie immédiatement que S est symétrique.
Par théorème spectral, il existe une matrice $P\in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telle que :

$$S=P^\top DP$$

Autrement dit

$$(M^{-1})^\top BM^{-1}=P^\top DP$$

Donc

$$B=M^\top P^\top DPM$$

Ainsi en posant $Q=PM$, on a bien

$$B=Q^\top DQ$$

et d'autre part, puisque $P\in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$Q^\top Q=M^\top P^\top PM=M^\top M=A.$$

ce qui donne bien les deux égalités demandées.
c) Si $B\in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $S=(M^{-1})^\top.B.M^{-1}$ est aussi dans $S_n^+(\mathbb{R})$.
En effet, en posant $N=M^{-1}$, pour tout $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top BX=X^\top N^\top BNX=Y^\top BY\geq 0$$

en ayant posé $Y=BX$.
Mais alors $S=P^\top DP$ avec $P\in O_n(\mathbb{R})$ et D à diagonale positive, par la Q1).
D'où la conclusion pour la matrice D. □

9) a) L'application $t\mapsto\ln\left(1+e^t\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée est :

$$t\mapsto\frac{e^t}{1+e^t}=1-\frac{1}{1+e^t}$$

et sa dérivée seconde est donc : $t\mapsto\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}>0$.
Donc la fonction étudiée est convexe sur $\mathbb{R}$.
b) Comme $D=\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ et $\mathrm{I}_n+D=\mathrm{diag}(1+\mu_1,\dots,1+\mu_n)$, l'inégalité à prouver équivaut à :

$$\left(\prod_{i=1}^n(1+\mu_i)\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant 1+\left(\prod_{i=1}^n\mu_i\right)^{\frac{1}{n}}\qquad(\ddagger)$$

Elle est triviale si l'un des μ_i est nuls, donc on supposera que pour tout i, $\mu_i > 0$.
On utilise le résultat de la question précédente : comme $t \mapsto \ln\left(1+e^t\right)$ est convexe, par la question 5 (Jensen) on a, en posant : $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = \frac{1}{n} \in \mathbf{R}_+, x_i = \ln(\mu_i)$ (rappelons que les μ_i sont strictement positifs, donc $\ln(\mu_i)$ est bien défini pour tout $i \in [\![1,n]\!]$) :

$$\ln\left(1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(\mu_i)}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(1+e^{\ln(\mu_i)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+\mu_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^n (1+\mu_i)^{\frac{1}{n}}\right).$$

En prenant l'image de chaque membre de l'inégalité par l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbf{R}$, on obtient bien (‡) et la conclusion demandée.

$$1+e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(\mu_i)} \leqslant \prod_{i=1}^n (1+\mu_i)^{\frac{1}{n}}$$

c) Soit $(A,B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})\right)^2$. Par la question 8) c) , il existe une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$, et de plus les coefficients diagonaux de D (que nous notons $\mu_1, \dots, \mu_n$ dans ce qui suit) sont strictement positifs. On a alors :

$$\begin{aligned}\det(A+B) = \det\left(QQ^\top + QDQ^\top\right) = \det\left(Q\left(\mathrm{I}_n + D\right)Q^\top\right) &= \det(Q)\det\left(\mathrm{I}_n + D\right)\det\left(Q^\top\right)\\ &= \left(\det(Q)\right)^2 \det\left(\mathrm{I}_n + D\right),\end{aligned}$$

et par un calcul analogue :

$$\det(A) = (\det(Q))^2, \quad \det(B) = (\det(Q))^2 \det(D)$$

donc l'inégalité à démontrer : $(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$, équivaut, après division par $(\det(Q))^2 > 0$ (rappelons que Q est inversible), à

$$\left(\det\left(\mathrm{I}_n + D\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

Or c'est l'inégalité du b), d'où la conclusion.

10) a) Soit $(A,B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})\right)^2$.
(M1) On reprend les notations et la stratégie de la question précédente, pour démontrer que l'inégalité demandée :

$$\forall t \in [0,1] \det((1-t)A + tB) \geqslant (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t, \tag{2}$$

équivaut à :

$$\forall t \in [0,1], \quad \prod_{i=1}^n ((1-t) + t\mu_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^n \mu_i\right)^t \tag{3}$$

Le lecteur vérifiera les détails, notamment pour la simplification de$(\det(Q))^2$. En prenant l'image de chaque membre de l'inégalité par le logarithme, ce qui est possible puisque tout est strictement positif, on note que cette inégalité équivaut à :

$$\forall t \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^n \ln((1-t) + t\mu_i) \geqslant t \sum_{i=1}^n \ln(\mu_i) \tag{4}$$

Or, on sait que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$. Cela implique :

$$\forall t \in [0,1], \forall i \in [\![1,n]\!], \quad -\ln((1-t)\cdot 1 + t\mu_i) \leqslant (1-t)\cdot(-\ln(1)) + t\cdot(-\ln(\mu_i))$$

d'où :

$$\forall t \in [0,1], \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \ln((1-t)\cdot 1 + t\mu_i) \geqslant t\ln(\mu_i)$$

et donc, en sommant cette inégalité de 1 à n : $\forall t \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \ln((1-t)+t\mu_i) \geqslant t\sum_{i=1}^{n} \ln(\mu_i)$.
On a démontré l'inégalité (**??**) ce qui, par équivalence, montre (**??**).
(M2) *Au lieu d'utiliser la méthode de la question précédente comme indiqué par l'énoncé, on utilise le* **résultat** *de cette question*
On commence par appliquer le résultat de la Q9 à $(1-t)A$ et tB ce qui donne :

$$\det{}^{1/n}((1-t)A+tB) \geq \det{}^{1/n}((1-t)A)+\det{}^{1/n}(tB) = (1-t)\det{}^{1/n}(A)+t\det{}^{1/n}(B)$$

ce qui se réécrit

$$\det((1-t)A+tB) \geq \Big((1-t)\det{}^{1/n}(A)+t\det{}^{1/n}(B)\Big)^n \tag{5}$$

D'après l'inégalité (**??**), pour montrer l'inégalité de cette question, il suffit de montrer l'inégalité (**??**) suivante :

$$\Big((1-t)\det{}^{1/n}(A)+t\det{}^{1/n}(B)\Big)^n \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t. \tag{6}$$

Or par concavité du ln, on sait que :

$$\begin{aligned} \ln\Big((1-t)\det{}^{1/n}(A)+t\det{}^{1/n}(B)\Big) &\geq (1-t)\ln(\det{}^{1/n}(A))+t\ln(\det{}^{1/n}(B)) \\ &= \ln\Big(\det{}^{\frac{1-t}{n}}(A).\det{}^{\frac{t}{n}}(B)\Big) \end{aligned}$$

En appliquant l'exponentielle, croissante et la puissance n, on obtient exactement l'inégalité (**??**) ce qui avec (**??**) achève la démonstration.
b) Si A ou B sont dans $S_n^+(\mathbb{R})\smallsetminus S_n^{++}(\mathbb{R}))$ alors $\det(A)=0$ ou $\det(B)=0$ donc le second membre de l'inégalité du a) est nul est le premier membre est clairement positif car $(1-t)A+tB \in S_n^+(\mathbb{R})$ et donc toutes ses v.p. sont positives donc son déterminant est positif.
c) En prenant le logarithme de l'inégalité obtenue au a), on a pour tout $t\in[0,1]$ et tout A, B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$:

$$\ln\circ\det((1-t)A+tB) \geq (1-t)\ln\circ\det(A)+t\ln\circ\det(B),$$

ce qui est la déf. de $\ln\circ\det$ est concave.

11) a) (i) Réflexivité : soit $A\in S_n(\mathbb{R})$: $A\geq A$ car $A-A=0$ et $0\in S_n^+(\mathbb{R})$.
(ii) Antisymétrie : soit A, B dans $S_n(\mathbb{R})$ tel que $A-B\in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B-A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
D'après le 1) cela signifie que les valeurs propres de la matrices symétrique $A-B$ sont à la fois positives et négatives donc toutes nulles.
Or $A-B$ est dz comme matrice symétrique réelle. Donc $A-B=0$.
(iii) Transitivité : soient A, B, C dans $S_n(\mathbb{R})$ telles que $A\geq B$ et $B\geq C$.
Autrement dit $A-B\in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B-C\in S_n^+(\mathbb{R})$.
Mais alors pour tout $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T.(A-C)X = X^T(A-B)X+X^T(B-C)X \geq 0$ comme somme de deux positifs.
Donc $A-C\in S_n^+(\mathbb{R})$ i.e. $A\geq C$.
b)
c)
d) Ce qu'on déduit facilement de l'hyp. (A_k) croissante c'est que pour tout $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite *réelle* $(X^T.A_kX)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $X^T.BX\in\mathbb{R}$, donc converge vers une limite $\ell(X)\in\mathbb{R}$.
Par polarisation, on en déduit que pour tout $(X,Y)\in M_{n,1}(\mathbb{R})^2$, la suite $(X^T.A_k.Y)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
En effet : en notant $\varphi_k(X,Y) = X^T.A_k.Y$ qui est une F.B.S., on a l'identité de polarisation :

$$\varphi_k(X,Y) = \frac{1}{2}[\varphi_k(X+Y,X+Y)-\varphi_k(X,X)-\varphi_k(Y,Y)]$$

Mais sachant maintenant que toutes le suites $(X^T.A_k.Y)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent, en particulier avec $X = E_i$ et $Y = E_j$ vecteurs colonnes de la base canonique, on a $\varphi_k(E_i, E_j) = A_k(i,j)$ l'entrée (i,j) de la matrice A_k.
Donc pour tout (i,j) les entrées $(A_k(i,j))$ convergent vers un réel $\ell_{i,j}$.
Ceci est la déf. de la convergence de (A_k) dans l'espace vectoriel de dim. finie $M_n(\mathbb{R})$. Donc en notant $L = (\ell_{i,j})$, on a bien montré que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
Enfin $L \in S_n(\mathbb{R})$ car $S_n(\mathbb{R})$ est un s.e.v. d'un e.v. de dim. finie donc un fermé. $\square$

12) a) En développant $S^2 - T^2 = S^2 - (S-W)^2 = S^2 - (S^2 - SW - WS + W^2) = SW + WS - W^2$.
Alors l'hyp. $((S^2-T^2)X|X) \geq 0$ donne $(SWX|X) + (WSX|X) - (X|W^2X) \geq 0$.
Mais comme S et W sont symétriques, on a $2(WX|SX) - (WX|WX) \geq 0$.
Si on prend λ une v.p. de W et X propre associé on obtient $2\lambda(X|SX) - \lambda^2\|X\|^2 \geq 0$.
Comme S est positif, on a si $(X|SX) \neq 0$, $\lambda \geq 0$ et si $(X|SX) = 0$ alors $\lambda = 0$.
Donc toutes les v.p. de W sont positives, ce qui montre $W \geq 0$ cqfd.
b) Avec le a), il est suffisant de montrer l'inégalité des carrés autrement dit ISMQ :

$$\forall\ t \in [0,1],\ (1-t)S + tT \geq ((1-t)\sqrt{S} + t\sqrt{T})^2 \quad (\dagger)$$

Après développement et simplification du membre de droite :

$$\begin{aligned}(\dagger) \quad &\Leftrightarrow \quad (1-t)S + tT \geq (1-t)^2S + t^2T + (1-t)t\sqrt{S}\sqrt{T} + (1-t)t\sqrt{T}\sqrt{S} \\ &\Leftrightarrow \quad S + T \geq \sqrt{S}\sqrt{T} + \sqrt{T}\sqrt{S}\end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité équivaut à l'inégalité des p.s (pour toute colonne X) :

$$((S+T)X\ |X) \geq (\sqrt{S}\ \sqrt{T}X\ |X) + (\sqrt{T}\sqrt{S}X\ |X)$$

Comme les opérateurs sont symétriques ceci équivaut encore à

$$((S+T)X|X) \geq 2(\sqrt{T}X|\sqrt{S}X) \quad (\ddagger)$$

Or par l'ICS

$$(s|\sqrt{T}X\| \leq \frac{1}{2}(\|\sqrt{S}X\|^2 + \|\ \sqrt{T}X\ \|^2) = \frac{1}{2}((SX|X) + (TX|X))$$

ce qui donne $(\ddagger)$.

13) a) On applique le théorème de réduction simultanée, du 8) c) : comme A est définie positive, il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale D tel que $A = Q^\top.Q$ et $B = Q^\top DQ$.
En outre comme B est elle aussi définie positive, $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ avec les $d_i > 0$.
Alors $A^{-1} = Q^{-1}(Q^\top)^{-1}$ et $A^{-1}.B = Q^{-1}.DQ$, ce qui montre tout le résultat du a).
b) Avec les notations du a), $A - B = P^\top(I-D)P$. Donc $A - B$ est définie positive ssi $I - D$ est définie positive donc ssi pour tout $i = 1, \ldots, n$, $d_i < 1$.
Or par a), les d_i sont strictement positifs et sont les v.p. de $A^{-1}B$.
Donc la condition : pour tout $i = 1, \ldots, n$, $d_i < 1$ équivaut bien à $\mathrm{Sp}(A^{-1}B) \in]0,1[$.
c) Avec le b), on sait que l'hypothèse $A - B > 0$ s'écrit : $\mathrm{Sp}(A^{-1}.B) \subset]0,1[$.
Avec le b), on sait que la conclusion $B^{-1} - A^{-1} > 0$ s'écrit : $\mathrm{Sp}(B.A^{-1}) \subset]0,1[$.
Ainsi le pb. est de comparer ces deux spectres. Or $B.A^{-1} = B(A^{-1}B)B^{-1}$, donc les deux matrices BA^{-1} et $A^{-1}B$ sont semblables et donc ont même spectre, ce qui donne la conclusion.
d) Avec le même critère du b), on veut montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1/2}.B^{1/2}) \subset]0,1[$ où $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.
La seule chose à montrer est que les éléments de ce spectre sont inférieurs strictement à 1.
Notons $C = A^{-1/2}.B^{1/2}$. Soit X un vecteur propre de C et λ la valeur propre associée.
Alors $X^TC^TCX = \lambda^2X^TX$

Or $C^T.C = B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}$ s'écrit aussi $C^T.C = B^{1/2}(A^{-1}.B)B^{-1/2}$, donc $A^{-1}.B$ et $C^T.C$ sont semblables.
Comme on sait déjà que $\mathrm{Sp}(A^{-1}.B) \subset]0,1[$, on a le même résultat sur $\mathrm{Sp}(C^\top.C)$. On peut alors utiliser un résultat classique qui aurait dû être dans l'énoncé :
Lemme :

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, en notant $\|\ \|_2$ la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne canonique sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|M\|_2 \overset{(1)}{=} \sqrt{\|M^\top M\|_2} \overset{(2)}{=} \sqrt{\rho(M^\top M)}$$

Application du lemme ici :
Pour $M = C$, on a montré que $\rho(C^\top C) < 1$ ce qui par le lemme montre que $\|C\|_2 < 1$ et comme le rayon spectral vérifie $\rho(C) \ \leq \|C\|$ pour toute norme matricielle, on a bien $\rho(C) < 1$ et la conclusion.
Idée pour la démonstration du lemme : L'égalité (2) vient de la même égalité $\|S\|_2 = \rho(S)$ pour toute matrice symétrique réelle, qui s'obtient en diagonalisant S en b.o.n.
L'égalité (1) se déduit essentiellement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à partir de $\|AX\|_2^2 = (X\ |A^T AX)$. □