D.M. 10 : Approximation hilbertienne et uniforme

Pour le lundi 5 février 2024

Déterminant de Gram et calcul de distances à un s.e.v.

Soit $(E, (\,|\,))$ un $\mathbb{R}$-e.v. préhilbertien. Pour toute famille $(v_1, \dots, v_r) \in E^r$, on appelle *matrice de Gram* la matrice $G(v_1, \dots, v_r) \in M_r(\mathbb{R})$ définie par $G(v_1, \dots, v_r) = ((v_i|v_j))_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2}$.

Par exemple $G(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) \end{pmatrix}$. On notera : $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_r) = \det(G(v_1, \dots, v_r))$.

Q1) Fixons une b.o.n. $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ avec $n \leq r$ et notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_r)$ donc $A \in M_{n,r}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$G(v_1, \dots, v_r) = A^\top.A$$

Q2) Montrer que $\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_r) = 0$ ssi $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille *liée*.

Q3) Soit F un s.e.v. de dimension finie de E, et $(w_1, \dots, w_d)$ une base *quelconque* de F (pas forcément orthonormée). Montrer que pour tout $v \in E$, $\mathrm{Gram}(v, w_1, \dots, w_d) = \|v - p_F(v)\|^2\,\mathrm{Gram}(w_1, \dots, w_d)$ et donc que :

$$d(v, F) = \sqrt{\frac{\mathrm{Gram}(v, w_1, \dots, w_d)}{\mathrm{Gram}(w_1, \dots, w_d)}}.$$

Déterminant de Cauchy et première application

Q4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathbb{K}$ un corps quelconque, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$ et on se propose de montrer que :

$$D_n := \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \overset{*}{=} \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} (a_i + b_j)}.$$

a) Justifier qu'il suffit de calculer D_n quand tous les a_i (resp. les b_j) sont deux à deux distincts. On suppose désormais cette condition réalisée.

b) On considère $F_n(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{X+b_1} & \frac{1}{X+b_2} & \dots & \frac{1}{X+b_n} \end{vmatrix}$.

Justifier que F_n est une fraction rationnelle de degré au plus -1.

c) Justifier qu'on peut écrire $F_n = \dfrac{P(X)}{(X + b_1)\dots(X + b_n)}$.

d) Déterminer une écriture scindée du polynôme P sans expliciter son coefficient dominant λ.

e) (i) On considère la décomposition en élément simples de F_n qu'on note :

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X + b_i}.$$

Exprimer λ_n en fonction de D_{n-1}.

(ii) En déduire le calcul du coefficient dominant λ de P et en déduire enfin la relation de récurrence cherchée entre D_n et D_{n-1} pour montrer la formule $(*)$ annoncée.

Une illustration : on considère l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)^2 dt.$$

Q5) a) Justifier que φ admet un minimum, atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$.

b) Calculer explicitement ce minimum μ à l'aide des questions précédentes. On trouvera $\mu = \dfrac{a}{(n+b)^c}$ avec a, b, c des entiers à préciser

Le théorème d'approximation par des quasi-polynômes étudié ici :

Hypothèses (H) et notations On se donne $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres *réels positifs* qui tend vers $+\infty$ et on considère les fonctions $w_k \ : \ x \in [0,1] \mapsto x^{\lambda_k}$. On note aussi pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathrm{Vect}(w_0, \dots, w_n)$ et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathrm{Vect}(w_i,\ i \in \mathbb{N})$ l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* des fonctions w_i.

On munit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de deux normes définies par $\forall\ f \in E$:

$$||f||_\infty = \sup_{[0,1]} |f| \quad \text{et} \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}.$$

Le reste du problème permettra d'établir une *condition nécessaire et suffisante* sur la suite (λ_k) pour que le s.e.v F de E soit *dense* dans E pour la $|| \ ||_2$ et pour la norme $|| \ ||_\infty$.

Le calcul de la question suivante généralise celui fait à la Q5) . On note $d_2(f, F_n)$ la distance entre f et F_n pour la norme $|| \ ||_2$.

Etude en $|| \ ||_2$

Q6) Montrer que si $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et si $f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\mu$ alors :

$$d_2(f, F_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{i=0}^{n} \left| \frac{\lambda_i - \mu}{\lambda_i + \mu + 1} \right|.$$

Q7) On fixe un $\mu \notin \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ et on note $f \ : \ x \mapsto x^\mu$.

Montrer que $d_2(f, F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k}$ est *divergente*.

Conséquence en terme de C.N.

Q8) Montrer que si une suite (λ_n) vérifiant **(H)** est telle que F est dense dans $(E, || \ ||_2)$ alors $\sum 1/\lambda_n$ diverge.

Q9) Montrer le même résultat si F est dense dans $(E, || \ ||_\infty)$.

L'étude en norme $|| \ ||_\infty$ pour la réciproque :

Q10) Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, Justifier que si $r \in \mathbb{N}$ est tel que pour tout $i \geq r$, $\lambda_i > 1$ alors pour tout $n \geq r$:

$$\forall\ x \ \in [0,1], \left| x^q - \sum_{i=r}^{n} a_i x^{\lambda_i} \right| \leq \sqrt{\int_0^1 \left(q t^{q-1} - \sum_{i=r}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i - 1} \right)^2 dt}$$

Q11) On suppose désormais que $\lambda_0 = 1$, En déduire que si $\sum 1/\lambda_i$ diverge alors $f \ : \ x \ \mapsto x^q$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de F.

Q12) Conclure enfin que $\sum 1/\lambda_i$ diverge alors F est dense dans $(E, || \ ||_\infty)$ et aussi dans $(E, \ || \ ||_2)$.

Ainsi avec $\boxed{F \text{ est dense dans } E \text{ pour chacune des deux normes ssi } \sum 1/\lambda_i \text{ diverge}}$