D.M. 10 : Approximation hilbertienne et uniforme : solutions

Déterminant de Gram et calcul de distances à un s.e.v.

Q1) Montrons que $A^\top.A = G(v_1,\dots,v_r)$: on note G pour $G(v_1,\dots,v_r)$.

D'un côté, pour tout $(i,j)\in[\![1,r]\!]^2$, $(A^\top.A)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ (déf. du produit de matrices, et de la tranposée).

De l'autre côté, comme $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de F, on sait que par écriture du p.s. en b.o.n. que $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = (v_i|v_j)$.

Ainsi, on a bien montré que pour tout (i,j), $(A^\top A)(i,j) = G(i,j)$ d'où l'égalité des deux matrices.

Q2) **Sens $\Leftarrow$ (M1)** Si la famille est liée, l'un des vecteurs v_j s'écrit $v_j = \sum_{k\neq j}\lambda_k v_k$.

Mais par linéarité du p.s., on a alors dans la matrice de Gram, pour tout i, $(v_j|v_i) = \sum_{k\neq j}\lambda_k(v_k|v_i)$ et donc pour les colonnes de la matrice de Gram : $C_j = \sum_{k\neq j}\lambda_k C_k$

Les colonnes de G sont liées donc le déterminant de Gram est nul.

(M2) On le voit aussi avec le rang du produit $A^\top.A$: si $(v_1,\dots,v_r)$ est liée alors $n<r$ et $\mathrm{rg}(A)\le n<r$ et donc $\mathrm{rg}(A^\top.A)\le \mathrm{rg}(A)<r$ donc $\mathrm{rg}(G)<r$ et G n'est pas inversible.

Sens $\Rightarrow$ Par contraposée.

(M1) Si $(v_1,\dots,v_r)$ est une famille *libre* alors on a $n=r$ et A est une matrice carrée inversible. Alors en appliquant la Q1) $\det(G)=\det(A)^2>0$, ce qui donne la conclusion, $\det(G)\neq 0$.

(M2) Si $\mathrm{Gram}(v_1,\dots,v_r)=0$, l'une des colonnes de $G(v_1,\dots,v_r)$ qu'on note C_j s'écrit comme C.L. des autres colonnes : $C_j = \sum_{k\neq j}\lambda_k C_k$.

Avec la déf. de $G(v_1,\dots,v_r)$ cela signifie que pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, $(v_i|v_j) = \sum_{k\neq j}\lambda_k(v_i|v_k)$.

En passant tous les termes dans un seul membre et par linéarité du produit scalaire, on obtient : $\left(v_i|(v_j-\sum_{k\neq j}\lambda_k v_k)\right)=0$.

En notant $w = v_j - \sum_{k\neq j}\lambda_k v_k$, on vient de montrer que $w\in\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_r)^\perp$. Or par sa définition même $w\in\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_r)$.

Ceci montre que $w=0$ c'est-à-dire que $v_j-\sum_{k\neq j}\lambda_k v_k=0$ et donc que la famille $(v_1,\dots,v_r)$ est *liée.*

Remarque : La (M1), outre qu'elle est plus courte, a montré que le déterminant de Gram était toujours positif. En fait la matrice de Gram est, mieux, une *matrice symétrique positive* cf. chapitre R4.

Q3) (i) Soit $v\in E$, qu'on écrit $v = p_F(v)+(v-p_F(v))$ alors $\|v\|^2 = \|p_F(v)\|^2+\|v-p_F(v)\|^2$.

En notant $\delta = d(v,F) = \|v-p_F(v)\|$, on a : $\|v\|^2 = \|p_F(v)\|^2+\delta^2$.

D'autre part pour tout $i=1,\dots,d$, $(v|w_i) = (p_F(v)|w_i)+(v-p_F(v)|w_i) = (p_F(v)|w_i)$.

Ainsi, on peut réecrire le déterminant de Gram sous la forme :

$$\mathrm{Gram}(v,w_1,\dots,w_d) = \begin{vmatrix} \|p_F(v)\|^2+\delta^2 & ((p_F(v)|w_1) & \dots & (p_F(v)|w_d)) \\ (p_F(v)|w_1) & & & \\ \vdots & & G(w_1,\dots,w_d)) & \\ (p_F(v)|w_d) & & & \end{vmatrix}.$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne on en déduit que : $Gram(v, w_1, \dots, w_d) =$

$$\begin{vmatrix} \delta^2 & ((p_F(v)|w_1) & \dots & (p_F(v)|w_d)) \\ 0 & & & \\ \vdots & & G(w_1, \dots, w_d)) & \\ 0 & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \|p_F(v)\|^2 & ((p_F(v)|w_1) & \dots & (p_F(v)|w_d \\ (p_F(v)|w_1) & & & \\ \vdots & & G(w_1, \dots, w_d)) & \\ (p_F(v)|w_d) & & & \end{vmatrix}$$

En développant le premier déterminant par rapport à la première colonne, et en reconnaissant que le second déterminant est encore un déterminant de Gram, on en déduit finalement la relation :

$$\mathrm{Gram}(v, w_1, \dots, w_d) = \dots \delta^2. \mathrm{Gram}(w_1, \dots, w_d) + \mathrm{Gram}(p_F(v), w_1, \dots, w_d) \quad (*)$$

Mais comme $p_F(v) \in \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_d)$, on sait par la Q2 que

$$\mathrm{Gram}(p_F(v), w_1, \dots, w_d) = 0.$$

Donc avec $(*)$ on conclut que

$$\boxed{\mathrm{Gram}(v, w_1, \dots, w_d) = \delta^2\, \mathrm{Gram}(w_1, \dots, w_d), \text{ où } \delta = \|v - p_F(v)\| \text{ comme demandé.}}$$

On passe aux racines carrées dans l'égalité précédente et on a la conclusion. □

Déterminant de Cauchy et première application

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4) a) Si $a_i = a_j$ alors la ligne L_i et la ligne L_j du tableau apparaissant dans le déterminant sont égales, donc le déterminant est nul. De même si $b_i = b_j$ avec les colonnes.

b) Si on développe le déterminant par rapport à la dernière ligne, on a $F_n(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X + b_i}$ où les λ_i sont des scalaires, donc F_n est une somme de fractions de degré -1 ou nulles. Comme le degré d'une somme de fractions rationnelles est inférieure ou égal au max. des degrés, on conclut que F_n est de degré au plus -1.

c) Il s'agit simplement de la réduction au même dénominateur de l'écriture du b).

d) Avec les notations du c), $\deg(F_n) = \deg(P) - n$, or d'après le b), $\deg(F_n) \leq -1$ donc $\deg(P) \leq n - 1$.
On remarque que pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $F_n(a_i) = 0$ car dans ce cas il y a deux lignes de la matrice dont F_n est le déterminant qui sont identiques.
Comme $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont deux à deux distincts, et que $\deg(P) \leq n - 1$, on conclut que P est de degré exactement $n-1$ (ou nul) et qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})$.

e) (i) Avec la notation du b), la partie polaire cherchée est donnée par $\lambda_n = [(\widetilde{X + b_n})F_n](-b_n)$.

Or $[(\widetilde{X + b_n})F_n](-b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1}$.

On obtient donc l'égalité $\lambda_n = D_{n-1}$.
e) (ii) Par la méthode « du cache », on sait que :

$$\lambda_n = [(\widetilde{X + b_n})F_n](-b_n).$$

Or ici $F_n(X) = \dfrac{\lambda(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})}{(X + b_1) \dots (X + b_n)}$

Donc $[(\widetilde{X + b_n})F_n](-b_n) = \dfrac{\lambda(-b_n - a_1) \dots (-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1) \dots (-b_n + b_{n-1})} = \dfrac{\lambda(b_n + a_1) \dots (b_n + a_{n-1})}{(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}$

Avec le résultat du (i), qui dit que $\lambda_n = D_{n-1}$, on conclut que :

$$\lambda = \frac{(b_n - b_1)\dots(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_n)\dots(a_{n-1} + b_n)} D_{n-1}.$$

Enfin, en considérant $D_n = F_n(a_n)$, on obtient :

$$D_n = \frac{(b_n - b_1)\dots(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_n)\dots(a_{n-1} + b_n)} D_{n-1} \frac{(a_n - a_1)\dots(a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)\dots(a_n + b_n)},$$

ce qui est la relation de récurrence cherchée.

Q5) a) On se place dans $E = \mathbb{R}[x]$ avec le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $w_i : t \in [0,1] \mapsto t^i$. On note $v : t \in [0,1] \mapsto 1$.

On remarque alors que $\varphi(a_1,\dots,a_n) = \|v - w\|^2$ où $w = -\sum_{k=1}^{n} a_k w_k$.

Quand $(a_1,\dots,a_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n$, le vecteur $w = -\sum_{k=1}^{n} a_k w_k$ décrit tout $F = \mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$.

Donc l'inf. de φ sur $\mathbb{R}^n$ est aussi $\inf\{\|v - w\|^2,\ w \in F\}$.

Par le théorème sur la projection orthogonale sur un s.e.v. de dim. finie d'un e.v. préhilbertien, on sait que cet inf. est un min. atteint pour l'unique vecteur $w_0 = p_F(v)$.

b) On cherche maintenant à expliciter $\mu = d^2(v,F)$. Or par la formule donnée à la Q3, on sait que :

$$\mu = \frac{\mathrm{Gram}(w_1,\dots,w_n,v)}{\mathrm{Gram}(w_1,\dots,w_n)}.$$

Or $(w_i|w_j) = \int_0^1 t^{i+j} dt = \dfrac{1}{i+j+1}$.

Donc $\mathrm{Gram}(w_1,\dots,w_n) = \det((\dfrac{1}{i+j+1}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.. On peut donc appliquer la formule du déterminant de Cauchy avec $a_i = i + 1/2$ et $b_j = j + 1/2$ et :

$$\mathrm{Gram}(w_1,\dots,w_n) = \frac{\prod_{1\le i<j\le n} (j-i)(j-i)}{\prod_{1\le i,j\le n} (i+j+1)}.$$

Mais de même en posant $v = w_0 : t \mapsto t^0$, on a de même $(v|w_j) = \dfrac{1}{j+1}$.

Alors $\mathrm{Gram}(v,w_1,\dots,w_n) = \det(\dfrac{1}{i+j+1})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$.

$$\text{Donc } \mathrm{Gram}(v,w_1,\dots,w_n) = \frac{\prod_{0\le i<j\le n} (j-i)(j-i)}{\prod_{0\le i,j\le n} (i+j+1)}.$$

Ainsi avec la formule de la Q3), μ s'obtient comme le quotient de ces deux déterminants de Cauchy : les facteurs qui ne se simplifient pas sont ceux correspondant à l'indice $i = 0$ au numérateur et au dénominateur ceux qui correspondent à $i = 0$ ou $j = 0$, ce qui donne :

$$\mu = \frac{\prod_{1\le j\le n} j^2}{\prod_{0\le j\le n} (j+1) \prod_{0\le i\le n}(j+1)} = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Q6) Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\mu$.

N.B. Il est facile de vérifier que la famille $(w_0,\dots,w_n)$ est libre par exemple car elle est totalement ordonnée pour la négligeabilité en $+\infty$.

Par la formule donnant la distance comme quotient de déterminants de Gram, on sait que

$$d_2(f,F_n) = \sqrt{\frac{\mathrm{Gram}(f,w_0\dots,w_n)}{\mathrm{Gram}(w_0,\dots,w_n)}}.$$

Avec la déf. du p.s. ici : $(w_i|w_j) = \displaystyle\int_0^1 t^{\lambda_i+\lambda_j}dt = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j+1} = \frac{1}{a_i+b_j}$ en posant $a_i = \lambda_i + 1/2$ et $b_j = \lambda_j + 1/2$.

Ainsi par la formule du déterminant de Cauchy, $\text{Gram}(w_0,\dots,w_n) = \dfrac{\prod_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)^2}{\prod_{0\le i,j\le n}(\lambda_i+\lambda_j+1)}$ et $\text{Gram}(f,w_0,\dots,w_n) = \dfrac{\prod_{-1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)^2}{\prod_{-1\le i,j\le n}(\lambda_i+\lambda_j+1)}$ en posant $\lambda_{-1} = \mu$.

Par le quotient des deux déterminants de Cauchy, on simplifie au numérateur tous les facteurs sauf ceux pour lesquels $i = -1$, et au dénominateur tous sauf ceux où $i = -1$ ou $j = -1$. On obtient :

$$\frac{\text{Gram}(f,w_0,\dots,w_n)}{\text{Gram}(w_0,\dots,w_n)} = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\lambda_j-\mu)}{(2\mu+1)\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j+\mu+1)^2}$$

Le facteur en $(2\mu+1)$ correspond au cas où $i = j = -1$. En prenant la racine carrée, on obtient bien :

$$d_2(f,F_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\prod_{i=0}^{n}\left|\frac{\lambda_i-\mu}{\lambda_i+\mu+1}\right|.$$

Q7)

$$d_2(f,F_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 \Leftrightarrow \ln(d_2(f,F_n)) = \ln\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{\lambda_i-\mu}{\lambda_i+\mu+1}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty.$$

Or $\ln(d_2(f,F_n)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right) = \sum_{k=1}^{r-1}\ln\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right) + \sum_{k=r}^{n}\ln\left(1-\frac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}\right)$ (†)
où r est tel qu'à partir du rang r, $\lambda_k > \mu$.

Posons $u_k = \ln\left(1-\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}\right)$ pour tout $k \ge r$.

Comme $\lambda_k \to +\infty$, on sait que $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$.

Par théorème sur les équivalents pour les séries à signes constants (ici négatifs), on sait donc que les séries de terme généraux $-\dfrac{1}{\lambda_k}$ et u_k ont même nature.

Donc $d_2(f,F_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ ssi $\sum\dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

Q8) Il suffit de montrer que si F est dense dans E pour la norme $\|\ \|_2$ alors $d_2(f,F_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ pour tout $f \in E$.

Soit $f \in E$. Comme F est dense dans E pour la norme $\|\ \|_2$ une suite $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle $\|f-f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La seule difficulté de la question était qu'il ne fallait pas croire que $f_n \in F_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$, $\|f-f_n\|_2 < \varepsilon$.

De plus comme $f_{n_0} \in F$, il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0} \in F_{n_1}$. Mais alors $f_{n_0} \in F_n$ pour tout $n \ge n_1$.

Donc pour $n \ge \max(n_0,n_1)$, on a donc $\inf\{\|f-g\|,\ g \in F_n\} \le \|f-f_{n_0}\|$ simplement car $f_{n_0} \in F_n$.

Et donc $d(f,F_n) < \varepsilon$.

Et pour $f : t \mapsto t^\mu$, on vient de voir que cette condition entraînait que $\sum 1/\lambda_k$ est divergente.

Remarque : En fait si la série est convergente, on a montré plus précisément qu'*aucune* des fonctions $t \mapsto t^\mu$ avec $\mu \notin \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ n'était alors dans l'adhérence de F.

Donc ou bien cette ensemble F est dense ou bien son adhérence ne contient aucune autre fonction puissance.

Q9) On rédemontre, cf. cours que la convergence pour la norme infinie entraîne la convergence pour la norme 2. Donc la densité pour la norme infinie entraîne la densité pour la norme 2 et la question précédente s'applique.

Q10) Soit $x \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|x^q - \sum_{i=r}^{n} a_i x^{\lambda_i}\right| &= \left|\int_0^x (qt^{q-1} - \sum_{i=r}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i - 1}) dt\right| \\
&\leq \sqrt{\int_0^x (qt^{q-1} - \sum_{i=r}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i-1})^2 dt} \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \sqrt{\int_0^1 \left(qt^{q-1} - \sum_{i=r}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i-1}\right)^2 dt}
\end{aligned}$$

en majorant les intégrales de 0 à x par les intégrales de 0 à 1 puisque l'intégrande est positive.

Q11) Soit $\varepsilon > 0$. Si $\sum 1/\lambda_i$ diverge, alors $\sum_{i \geq r} 1/(\lambda_i - 1)$ diverge aussi et avec la Q7 appliquée à cette famille des $(t^{\lambda_i - 1})$ on en déduit qu'il existe $a_r, \ldots, a_n$ tels que

$$\sqrt{\int_0^1 \left(qt^{q-1} - \sum_{i=r}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i - 1}\right)^2 dt} < \varepsilon$$

Mais alors la majoration de la question précédente dit que pour tout $x \in [0,1]$, $\left|x^q - \sum_{i=r}^n a_i x^{\lambda_i}\right|$ et donc en passant au sup. on a bien montré que pour $f \ : \ x \mapsto x^q$, il existe un $g \in F$ tel que

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

En appliquant ceci à $\varepsilon = 1/n$, on fabrique bien une suite $(g_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui CVU vers f sur $[0,1]$.

Q12) a) Soit d'abord, $p \in \mathbb{R}[x]$. On peut l'écrire $p(x) = \sum_{q=0}^{n} a_q x^q$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque indice $q \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_q \neq 0$, on sait par le 6.1. qu'il existe une fonction $f_q \in F$ tel que $\sup_{x \in [0,1]} |x^q - f_q(x)| \leq \varepsilon / n |a_q|$.
Alors $\sup_{x \in [0,1]} |a_q x^q - a_q f_q(x)| \leq \varepsilon / n$.

Et en additionnant ces inégalité par I.T., $\sup_{x \in [0,1]} |p(x) - \sum_{q=0}^{n} a_q f_q(x)| \leq \varepsilon$.

On a donc bien trouvé un élément $w = \sum_{q=0}^{n} a_q f_q \in F$ tel que $\|p - w\|_\infty \leq \varepsilon$.

b) Reste à conclure que F est dense dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $f \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un $w \in F$ tel que $\|f - w\|_\infty < \varepsilon$. : Or par théorème de Weierstrass, il existe un $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon/2$. Et par le a), pour ce polynôme p, il existe un $w \in F$ tel que $\|p - w\|_\infty < \varepsilon/2$.
Par I.T., on conclut que $\|f - w\| < \varepsilon$. □

N.B. On peut aussi raisonner sur les adhérences : on a montré au a) que $\mathbb{R}[x] \subset \overline{F}$ donc $\overline{\mathbb{R}[x]} \subset \overline{\overline{F}} = \overline{F}$ et donc par Weierstrass $E = \overline{F}$.