Banque CCINP : 39, 48, 76, 77, 79, 80, 81, 82.

Approximation uniforme, Weierstrass

Exercice 1. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Montrer $\nexists\ (p_n) \in \mathbb{R}[x]^{\mathbb{N}}$, $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} f$ uniformément sur $]0,1]$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\exists\,(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$, $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ et $\|f' - P_n'\|_\infty \to 0$.

Exercice 3. a) Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ tel que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) vérifiant $P_n(0) = 0$ et convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers f.

b) Soit $F = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \,/\, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\right\}$. Déduire du a) que $\operatorname{Vect}\{x \to e^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $(F, \|\,\|_\infty)$.

Exercice 4. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que l'application $(\mathcal{C}(D,\mathbb{C}), \|\,\|_\infty) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$ est continue.

b) Montrer que pour toute fonction polynomiale $f \in \mathbb{C}[z]$, $\varphi(f) = 2\pi f(0)$.

c) En déduire que $\mathbb{C}[z]$ n'est pas dense dans $(\mathcal{C}(D,\mathbb{C}), \|\,\|_\infty)$, autrement que le théorème d'approximation de Weierstrass n'est pas vrai en variable complexe.

Exercice 5 (Version « Lebesgue » du lemme de Riemann-Lebesgue)**.** A l'aide de l'exercice fait en cours avec des intégrales sur un segment, montrer que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro en $\pm\infty$ autrement dit que si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$alors $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Espaces préhilbertiens

Exercice 6 (Famille très générale de p.s)**.** Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert non vide et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que l'ensemble $\{t \in]a,b[,\ \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I.

On note E_φ l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |g(t)|^2\varphi(t)dt$ converge.

a) Montrer que E_φ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'application $E_\varphi^2 \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\varphi(t)dt$ est un produit scalaire. On dit souvent que la fonction φ est une *fonction de poids* en ce sens qu'elle modifie la mesure sur l'intervalle $]a,b[$.

c) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I. En déduire que toutes les fonctions polynomiales sont dans E_φ. (On identifiera les fonctions polynomiales définies sur I avec leur polynôme formel associé, ce qui est sans inconvénient puisque I est infini).

d) On suppose que $I =]-1,1[$ et $\varphi(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. On considère les polynômes de Tchebychev T_n définis par $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$. Montrer que la famille (T_n) est orthogonale pour ce p.s.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Si $(f,g) \in E^2$, on pose $< f,g >= \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$.

a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire.

b) On pose $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f'' = f\}$. Montrer que $V \overset{\perp}{\oplus} W = E$.

Exercice 8. Montrer que si $A,B \in S_n(\mathbb{R})$ alors $[\operatorname{Tr}(AB+BA)]^2 \le 4\operatorname{Tr}(A^2)\operatorname{Tr}(B^2)$.

Exercice 9. Trouver les $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2dt = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 10. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$. Pour $P,Q \in E$, on pose $f(P,Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$. a) Montrer que f est un produit scalaire sur E. b) Déterminer une base orthonormée de E. c) Exprimer les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ dans cette base. Que remarque-t-on ?

Exercice 11. Soit E. un espace euclidien, et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que p est un projecteur orthogonal non nul ssi $|||p||| = 1$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le p.s. est noté $(\ |\ )$. Soit F un s.e.v. de E et $(e_1,\dots,e_d)$ une b.o.n. de ce s.e.v. F. Pour deux vecteurs $(u,v) \in E^2$ tous deux non nuls, on définit l'angle géométrique $\widehat{(u,v)}$ par :

$$\widehat{(u,v)} = \operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right).$$

On considère un vecteur *unitaire* $v \in E$ et on note $\widetilde{v}$ son projeté orthogonal sur F.

On note α l'angle géométrique entre $(v,\tilde{v})$ et pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, $\alpha_i = \widehat{(v,e_i)}$.

Montrer que $\cos^2(\alpha) = \displaystyle\sum_{i=1}^d \cos^2(\alpha_i)$.