MP 2 **Mardi 16 Janvier 2024**

Devoir surveillé 4 (4h)

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet va étudier des propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}$$

Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$$

I Préliminaires :

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1) Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.

2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

Remarque : on admettra que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt}\, \mathrm{d}t \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}$$

3) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbf{R}$.

II Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle que

$$\exists\, C \in \mathbb{R}, \quad \forall\, t \in \mathbf{R}, \quad |f(t)| \leq \frac{C}{t^2+1}.$$

On pose

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4) Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_h : \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

5) a) Expliciter la valeur de φ_h sur chaque intervalle $[kh, (k+1)h[$ pour $k \in \mathbb{N}$,
b) montrer que φ_h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

c) montrer enfin que $S(h) = \int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\mathrm{d}t$

6) a) Montrer que, pour tous $h \in]0,1]$ et $t \in [1, +\infty[$, on a

$$|\varphi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}$$

b) En déduire que

$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ quand } h \to 0.$$

7) a) En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

b) Conclure : la fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III Formule sommatoire de Poisson

On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$. Si $u \in C_{2\pi}$, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, on appelle p-ième coefficient de Fourier complexe de u, le nombre :

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t$$

On admet le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $C_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{x^2+1} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R},$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3 . On pose également

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx} \text{ pour } x \in \mathbf{R}.$$

8) Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

9) Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

10) a) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $c_p(G) = 2\pi c_p(F)$, ce qui par la propriété admise ci-dessus, entraîne que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a montré que $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2n\pi)$$

b) Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

Cette égalité constitue la formule sommatoire de Poisson.

IV Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{e^{it^2}-1}{t^2} \text{ si } t \neq 0 \\ i \text{ si } t = 0 \end{cases}$

11) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

12) Etablir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O\left(t^{-2}\right)$ quand $t \to \pm\infty$.

13) Montrer que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} \, \mathrm{d}x$ est convergente.

14) Montrer que $\widehat{f}(x) = O\left(x^{-2}\right)$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbf{R}$$

15) En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O\left(x^{3/2}\right)$$

quand $x \to 0$ par valeurs strictement positives.

Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I définie à la question 13).

16) Exprimer, pour $x \in \mathbf{R}, F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.

17) Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

Illustration : essai de tracé du graphe de R avec la somme partielle d'ordre 100.