MP 2 **Mardi 16 Janvier 2024**

Devoir surveillé 4 (4h) : Mines Ponts PC 2019

On reproduit ici avec quelques modifications le de prépas.org

1) Posons $u_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, alors chaque fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente), ceci prouve la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions continues $\sum_{n\geq 1} u_n$, la fonction somme R est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction $v : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $v(0) = 1$, d'où son intégrabilité sur $]0,1]$. Pour $x \geq 1$, on a $|v(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ avec $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$, donc v est aussi intégrable sur cet intervalle. Finalement, v est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente.

3) Posons $w(x,t) = f(t)e^{-ixt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Alors $t \mapsto w(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}, x \mapsto w(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a la domination $|w(x,t)| = |f(t)|$ avec f intégrable sur $\mathbb{R}$. Du théorème de continuité des intégrales à paramètre, on déduit l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}$ de $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} w(x,t)\mathrm{d}t$.

4) De $|f(nh)| \leq \frac{C}{n^2h^2+1}$, on déduit la convergence absolue de la série $\sum f(nh)$, donc l'existence de $S(h)$.

5) a)

$$s\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [kh,(k+1)h[\quad \varphi_h(t) = f(kh),$$

b) • D'une part, par a), l'application φ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. En effet, φ_h est continue (car constante) sur $]kh,(k+1)h[$ et

$$\begin{array}{ll} \forall k \in \mathbb{N} & \lim_{t\to(kh)^+} \varphi_h(t) = \varphi_h(kh) = f(kh); \\ \forall k \in \mathbb{N}^* & \lim_{t\to(kh)^-} \varphi_h(t) = f((k-1)h), \end{array}$$

il y a donc une limite à gauche et une limite à droite finies en les points $kh, k \in \mathbb{N}$.

• En outre,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |\varphi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2},$$

et la fonction majorante, équivalente à $t \mapsto \frac{C}{t^2}$ en $+\infty$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc la fonction φ_h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c) Comme φ_h est intégrable, on peut donc écrire $\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nh} \varphi_h(t)\mathrm{d}t$.

Or $\int_0^{nh} \varphi_h(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi_h(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} hf(kh) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(h)$ par définition de $S(h)$.

On a donc bien montré que $\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\mathrm{d}t = S(h)$.

6) Si $h \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$, alors par hypothèse sur f, on sait que :

$$|\varphi_h(t)| = |f(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h)| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2}$$

Or par déf. de la partie entière, on sait que : $\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \geq \left(\frac{t}{h}-1\right)h = t-h \geq t-1 \geq 0$, donc

$$|\varphi_h(t)| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2} \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}$$

b) On veut appliquer le théorème de convergence dominée avec paramètre continu $h \to 0$. On considère $h \in]0,1]$.

$$t-h = \left(\frac{t}{h}-1\right)h \leq \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \leq \frac{t}{h}h = t$$

donc, par encadrement, $\lim_{h\to 0}\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h = t$, donc par continuité de f

$$\varphi_h(t) = f\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t) \quad (1)$$

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$et tout $h \in]0,1]$, on a $|\varphi_h(t)| = |f(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h)| \leq \frac{C}{1+\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor^2 h^2} \leq C$, et pour $t \geq 1$, on peut utiliser la majoration démontrée au 6) a), on a finalement la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |\varphi_h(t)| \leq \alpha(t), \quad (2)$$

avec $\alpha(t) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } \quad t \geq 1 \end{cases}$, fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, indépendante de h,

Avec (1) et (2) le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique donc et conduit au résultat annoncé au début de cette question.

7) a) La fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour $|t| \geq 1$, $\left|\left(t^2+1\right) f(t)\right| = \frac{t^2+1}{t^2}\left|\sin\left(t^2\right)\right| = (1+\dfrac{1}{t^2})|\sin(t^2)| \leq 2$
- Pour $|t| \leq 1$, $\left|\left(t^2+1\right) f(t)\right| = (t^2+1)|\dfrac{\sin(t^2)}{t^2}| \leq 2 \times 1 = 2$.

Au total, avec $C = 2$, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|ft)| \leq \dfrac{C}{1+t^2}$, donc f satisfait les hypothèses posées en chapeau de cette partie II. Ainsi, on peut appliquer à cette fonction f le résultat du 6)a) qui va relier notre fonction R à une intégrale :

$$S(h) = h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = h\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2h^2\right)}{n^2h^2}\right) = h + \frac{1}{h}R\left(h^2\right) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Donc $R\left(h^2\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}h$ lorsque $h \to 0^+$. En posant $h = \sqrt{x}$, on a

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$$

b) Avec le a), on a donc $\frac{R(x)-R(0)}{x-0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et la fonction R n'est pas dérivable en 0 .

8) a) Pour n entier relatif et x réel, posons $f_n(x) = f(x+2n\pi)$. On a alors $|f_n(x)| \leq \frac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1}$, ce qui entraîne la convergence absolue des séries $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n\geq 1} f_{-n}(x)$, donc l'existence de $F(x)$.

b) On a, par décalage d'indice,

$$F(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2(n+1)\pi) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2n\pi) = F(x)$$

la fonction F est donc 2π-périodique.

c) Il suffit alors de montrer la continuité de F sur le segment $S =| 0, 2\pi]$. Chaque fonction f_n est continue sur S, et on a

$$\forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leq \frac{C_1}{(x+2n\pi)^2+1} \leq \frac{C_1}{4\pi^2n^2+1}.$$

Comme ce majorant est le terme général d'une série convergente indépendante de x, on a prouvé la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur S. On procède de même pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_{-n}$, en écrivant

$$\forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f_{-n}(x)| \leq \frac{C_1}{(x-2n\pi)^2+1} \leq \frac{C_1}{4\pi^2(n-1)^2+1}$$

et on a aussi la convergence normale sur S de cette série. Il en résulte la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

9) Pour n entier relatif et x réel, posons $g_n(x) = \hat{f}(n)e^{inx}$. Alors chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g_n(x)| = |\hat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{n^2+1},$$

ce qui donne directement la convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries $\sum_{n\geq 0} g_n$ et $\sum_{n\geq 1} g_{-n}$. Il en résulte que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, chaque fonction g_n est 2π-périodique, donc G aussi.

10) a) D'après la propriété admise en chapeau de cette partie, pour montrer l'égalité $G = 2\pi F$, il suffit de montrer que l'on a $c_p(G) = c_p(2\pi F)$, soit $c_p(G) = 2\pi c_p(F)$ pour tout p entier relatif. Or,

$$c_p(G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t = \hat{f}(p)$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,p}$, l'interversion série-intégrale étant autorisée par la convergence normale sur le segment $[0,2\pi]$ de la série de fonctions $\sum h_n$ avec $h_n(t) = \hat{f}(n)e^{i(n-p)t}$, on a en effet $\|h_n\|_\infty = |\hat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{n^2+1}$.

D'autre part,

$$c_p(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(t+2n\pi)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$$

car la série de fonctions $\sum k_n$, avec $k_n(t) = f(t+2n\pi)e^{-ipt}$, converge aussi normalement sur le segment $[0,2\pi]$ car $|k_n(t)| = |f(t+2n\pi)| \leq \frac{1}{(t+2n\pi)^2+1} \leq \frac{1}{4n^2\pi^2+1}$ pour n positif, et on adapte pour n négatif (*cf*. corrigé de la question 8.).

On obtient alors, par translation de la variable puis relation de Chasles,

$$\begin{aligned} c_p(F) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)e^{-ip(u-2n\pi)}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)e^{-ipu}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ipu}\,\mathrm{d}u = \frac{\hat{f}(p)}{2\pi} = \frac{c_p(F)}{2\pi}. \end{aligned}$$

On conclut que $G = 2\pi F$.

b) Posons $g(t) = f\left(\frac{at}{2\pi}\right)$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto \left(t^2+1\right)g(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée au voisinage de $\pm\infty$ en vertu de la majoration $\left|\left(t^2+1\right)g(t)\right| \leq C_1 \frac{t^2+1}{\left(\frac{at}{2\pi}\right)^2+1}$

Alors $\hat{g}(x) = \frac{2\pi}{a}\hat{f}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ par un changement de variable linéaire dans l'intégrale de définition, et la fonction $x \mapsto \left(x^2+1\right)\hat{g}(x)$ est aussi bornée pour des raisons similaires.

On peut donc appliquer le résultat de la question 10 a), qui donne que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{g}(n) = 2\pi\sum_{n\in\mathbf{Z}} g(2n\pi)$, ce qui donne bien la relation

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right)$$

11) Pour tout t réel (y compris pour $t = 0$), on a $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k!}t^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!}t^{2k}$. La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après le cours.

12) Pour $t \neq 0$, on calcule

$$f'(t) = \frac{2ie^{it^2}}{t} - \frac{2\left(e^{it^2}-1\right)}{t^3}, \text{ puis } \quad f''(t) = -4e^{it^2} - \frac{6ie^{it^2}}{t^2} + \frac{6\left(e^{it^2}-1\right)}{t^4}.$$

Comme $\left|e^{it^2}\right| = 1$, on a immédiatement $f'(t) \to 0$ et $f''(t) = -4e^{it^2} + O\left(t^{-2}\right)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

13) La fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire, elle est donc intégrable sur le segment $[-1,1]$ et, pour montrer la (semi)-convergence de l'intégrale proposée, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$. Or, si $A \in [1,+\infty[$, le changement de variable $x = \sqrt{t}$ puis une intégration par parties donnent

$$\int_1^A e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\right]_1^{A^2} - \frac{i}{4}\int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

L'expression entre crochets tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $O\left(t^{-3/2}\right)$ en $+\infty$, chacun des deux termes issus de l'intégration par parties admet donc une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale généralisée I.

14) Déjà comme $f(t) = O(1/t^2)$ pour $|t| \to +\infty$, la fonction $\hat{f}$ est bien définie. Pour x réel non nul, on intègre par parties, dans l'intégrale généralisée :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{i}{x}f(t)e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Cette I.P.P. est possible car le terme entre crochets est convergent, et même nul : $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. On recommence :

$$\hat{f}(x) = -\frac{i}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x^2}f'(t)e^{-ixt}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

Le terme entre crochets est de nouveau nul car $\lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$. Posons maintenant $r(t) = f''(t) + 4e^{it^2}$. La question 12) nous apprend que $r(t) = O\left(t^{-2}\right)$ en $\pm\infty$. Cette fonction r, qui est continue sur $\mathbb{R}$, est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(t^2-xt\right)}\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

La mise sous forme canonique du trinôme $t^2 - xt$ montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(t^2-xt\right)}\mathrm{d}t = Ie^{-i\frac{x^2}{4}}$. Finalement,

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{x^2}\left(4|I| + \int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)|\mathrm{d}t\right)$$

ce qui montre que $\hat{f}(x) = O\left(x^{-2}\right)$ quand $x \to \pm\infty$.

15) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de manière évidente un $O\left(t^{-2}\right)$ en $\pm\infty$.
La fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par la question 3) et est $O\left(t^{-2}\right)$ en $\pm\infty$ par la question 14). Ceci entraîne que $\mapsto \left(t^2+1\right)f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et pareillement pour $\hat{f}$), on peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson obtenue dans la partie III. avec $a = \sqrt{x}$, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

soit

$$i + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}-1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

en séparant les termes pour $n = 0$ et en remarquant que la fonction f est paire, et $\hat{f}$ aussi en conséquence. Poursuivons :

$$i + \frac{2}{x}(F(x) - F(0)) = \frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

soit

$$F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2}\hat{f}(0) - \frac{i}{2}x + \sqrt{x}s(x),$$

avec $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$. Il reste à prouver que $s(x) = O(x)$ lorsque $x \to 0^+$. Or, il existe $C > 0$ tel que $|\hat{f}(t)| \leq \frac{C}{t^2+1}$ pour tout réel t, ainsi $\left|\hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{C}{1+\frac{4n^2\pi^2}{x}} \leq \frac{Cx}{4n^2\pi^2}$, puis

$$|s(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{C}{4\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)x$$

ce qui suffit. On a donc $F(x) = F(0) + \frac{\hat{f}(0)}{2}\sqrt{x} - \frac{i}{2}x + O\left(x^{3/2}\right)$, soit le développement demandé avec $b = -\frac{i}{2}$ et $a = \frac{\hat{f}(0)}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. On peut exprimer cette intégrale en fonction de I : en effet, le calcul de f' réalisé à la question 14. montre que $tf'(t) = 2ie^{it^2} - 2f(t)$, ce que l'on peut écrire sous la forme $f(t) + (f(t) + tf'(t)) = 2ie^{it^2}$, puis en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ (toutes les fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + [tf(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\ \mathrm{d}t$$

soit (le terme entre crochets est nul) : $\hat{f}(0) = 2iI$, puis $a = iI$.

16) On a $F(\pi + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(\pi+x)}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2\pi}e^{in^2x}}{n^2}$. Or, l'entier n^2 est de même parité que n, donc $e^{in^2\pi} = (-1)^n$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs (la série est absolument convergente), on écrit

$$\begin{aligned} F(\pi + x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i4p^2x}}{4p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)^2x}}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}F(4x) - \left(F(x) - \frac{1}{4}F(4x)\right) = \frac{1}{2}F(4x) - F(x). \end{aligned}$$

17) On a $R(x) = \mathrm{Im}(F(x))$. Or, la fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 "au voisinage à droite" du point π puisque, des questions 15. et 16., on tire, pour $x > 0$,

$$F(\pi + x) = \frac{1}{2}\left(F(0) + 2a\sqrt{x} + 4bx + O\left(x^{3/2}\right)\right) - \left(F(0) + a\sqrt{x} + bx + O\left(x^{3/2}\right)\right),$$

d'où $F(\pi + x) = -\frac{1}{2}F(0) + bx + o(x) = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{i}{2}x + o(x)$ et, en prenant la partie imaginaire, $R(\pi + x) = -\frac{1}{2}x + o(x)$ lorsque $x \to 0^+$. Enfin, la fonction $x \mapsto R(\pi + x)$ étant impaire, on conclut que $R(\pi + x) = -\frac{1}{2}x + o(x)$ lorsque $x \to 0$. Donc R admet un développement limité à l'ordre 1 au point π, et est donc dérivable en ce point avec $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.