MP 2 **Mardi 16 Janvier 2024**

Devoir surveillé 4 : Appendice calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$

On veut ici démontrer le résultat admis dans le sujet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ à l'aide de deux outils intéressants en eux-même :

- l'identité de Maz pour les transformées de Laplace,
- un cas très particulier de la méthode des résidus pour les intégrales de fonctions rationnelles.

Faisons d'abord deux rappels de résultats qu'on pourra utiliser sans démonstration :

(R1) si $f \in \mathcal{CM}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ est telle que pour tout $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on pose $\forall\, x > 0,\ L(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$. La fonction $L(f)$ est appelée *transformée de Laplace de f*.

(R2) la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, elle vérifie pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

A 1 Justifier que pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ il est équivalent de calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}} dt$.

A 2 L'identité de Maz pour la transformée de Laplace affirme que si f et g vérifient les conditions de **(R1)** et que la fonction produit $t \mapsto f(t).L(g)(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ alors :

$$\int_0^{+\infty} f(t).L(g)(t) dt = \int_0^{+\infty} L(f)(x).g(x) dx$$

Démontrer cette identité en **admettant** qu'on peut permuter deux intégrales dans ce contexte.

A 3 Calculer la transformée de Laplace de $f\ :\ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sin(t)$

A 4 Montrer que si $\alpha > 0$ et $g\ :\ x \mapsto x^\alpha$ et qu'on note $L(g)(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) e^{-tx} dx$ alors :

$$\forall\, t > 0,\ L(g)(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha+1}}.$$

A 5 Déduire de ce qui précède que :

$$J := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

A 6 En déduire que $J = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$.

A 7 Pour le calcul de l'intégrale $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$, on va utiliser une méthode plus courte que la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, utilisant plutôt,dans ce cas particulier des intégrales de $-\infty$ à $+\infty$, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ qu'on écrit $\alpha = a + ib$ avec $b \neq 0$. On note $sgn(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b > 0, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Démontrer que $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{+X} \frac{dx}{x - \alpha} = i\pi sgn(b)$

N.B Attention cela n'a pas de sens d'écrire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\alpha}$ car cette intégrale est divergente. Ici on considère des intégrales « symétriques » particulières.

b) Déduire la valeur de K du a) via la décomposition en éléments simples de $y^2/(1+y^4)$ dans $\mathbb{C}(y)$ et conclure pour I.

Devoir surveillé 4 : calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}dx$: solution

A 1 Par changement de variable $t=x^2$ ($\mathcal{C}^1$ strictement croissant sur $]0,+\infty[$) on a $x=\sqrt{t}$ et $dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$, les bornes sont inchangées, donc

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{2t\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}J$$

A 2 Calcul immédiat avec la permutation admise :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}f(t).L(g)(t)dt &= \int_0^{+\infty}f(t)(\int_0^{+\infty}g(x)e^{-xt}dx)dt\\ &= \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}f(t)g(x)e^{-xt}dx)dt\\ &= \int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}f(t)g(x)e^{-xt}dt)dx \quad \text{par la permutation admise}\\ &= \int_0^{+\infty}g(x)(\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt)dx\\ &= \int_0^{+\infty}L(f)(x).g(x)dx.\end{aligned}$$

A 3 Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}L(f)(x) &= \int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt=\mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{it}.e^{-xt}dt)\\ &= \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty}e^{(i-x)t}dt)=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{i-x}e^{(i-x)t}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{-1}{i-x}\right]\right)=\mathrm{Im}\left(\left[\frac{x+i}{x^2+1}\right]\right)=\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

A 4 On se ramène à la fonction Γ par un changement de variable : $u=tx$, $du=tdx$

$$\begin{aligned}L(g)(t) &= \int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-tx}dx\\ &= \int_0^{+\infty}(\frac{u}{t})^\alpha e^{-u}\frac{du}{t}=\frac{1}{t^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

A 5 Avec la question précédente pour $\alpha=1/2$, on sait que pour $g\,:\,x\mapsto x^{1/2}$, on a :

$$\forall\, t>0,\ L(g)(t)=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{t^{3/2}}.$$

Or avec le rappel (R2), on sait que $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc :

$$\forall\, t>0,\quad L(g)(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2t^{3/2}}.$$

Finalement, on a donc :

$$\forall\, t>0,\ \frac{1}{t^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}L(g)(t)$$

Avec les trois questions précédentes et $f(t)=\sin(t)$ et $g(x)=x^{1/2}$, on a alors :

$$J:=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt=\int_0^{+\infty}f(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}L(g)(t)dt\underset{A2}{=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}L(f)(x)g(x)dx\underset{A3,A4}{=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}x^{1/2}\,dx,$$

ce qui est la formule demandée.

A 6 Par changement de variable $y = \sqrt{x}$, donc $x = y^2$ et $dx = 2ydy$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{2y^2}{1+y^4}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}dy$$

la dernière égalité étant obtenue par parité de l'intégrande.

A 7 a) $\dfrac{1}{x-\alpha} = \dfrac{1}{x-a-ib} = \dfrac{x-a+ib}{(x-a)^2+b^2} = \dfrac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + i\dfrac{b}{(x-a)^2+b^2}$.

Donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x-\alpha}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln[(x-a)^2+b^2] + i\dfrac{b}{b}\arctan(\dfrac{x-a}{b})$.

$$\begin{aligned}\int_{-X}^{X} \frac{dx}{x-\alpha} &= \frac{1}{2}[\ln[(x-a)^2+b^2]_{-X}^{X} + i[\arctan(\frac{x-a}{b})]_{-X}^{X},\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(X-a)^2+b^2}{(-X-a)^2+b^2}\right) + i\left(\arctan(\frac{X-a}{b}) - \arctan(\frac{-X-a}{b})\right).\end{aligned}$$

Or $\ln\left(\dfrac{(X-a)^2+b^2}{(-X-a)^2+b^2}\right) \underset{X\to+\infty}{\sim} \dfrac{X^2}{X^2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Si $b>0$: $\left(\arctan(\dfrac{X-a}{b}) - \arctan(\dfrac{-X-a}{b})\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$.

Si $b<0$: $\left(\arctan(\dfrac{X-a}{b}) - \arctan(\dfrac{-X-a}{b})\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} -\pi/2 - (+\pi/2) = -\pi$.

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\alpha} = i\pi sgn(b)$

b) La quatre pôles de $F(y) = y^2/(1+y^4)$ sont les quatre racines quatrièmes de -1.

On les note ici $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}$ où $\alpha = e^{i\pi/4}$, et $\beta = e^{3i\pi/4}$.

Comme F est à coefficients réels, la D.E.S. s'écrit $F = \dfrac{\lambda_\alpha}{y-\alpha} + \dfrac{\overline{\lambda_\alpha}}{y-\overline{\alpha}} + \dfrac{\lambda_\beta}{y-\beta} + \dfrac{\overline{\lambda_\beta}}{y-\overline{\beta}}$.

Enfin comme $F = P/Q$ avec $P(y) = y^2$ et $Q(y) = y^4+1$ on sait que

$$\lambda_\alpha = \frac{P(\alpha)}{(Q')(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{4\alpha^3} = \frac{1}{4\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{4}$$

De même bien sûr pour β.

Donc $F = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\overline{\alpha}}{y-\alpha} + \dfrac{\alpha}{y-\overline{\alpha}} + \dfrac{\overline{\beta}}{y-\beta} + \dfrac{\beta}{y-\overline{\beta}}\right)$.

On peut alors utiliser les formules du a) pour les quatre termes de cette somme : on sait que $\alpha = e^{i\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $\beta = e^{3i\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$.

$$K := \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)dy = \frac{i\pi}{4}(\overline{\alpha} - \alpha + \overline{\beta} - \beta)$$

Or $\alpha + \beta = e^{i\pi/4} + e^{3i\pi/4} = 2\sin(\pi/4)i = \sqrt{2}i$ donc $(\overline{\alpha} - \alpha + \overline{\beta} - \beta) = -2\sqrt{2}i$ et finalement :

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

On a vu au A1 que $I = \dfrac{1}{2}J$ puis au A6 que $J = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}K$, au total, on trouve bien que : $I = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}K = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.