D.M. 9 : suites de Dirac et théorème d'approximation de Weierstrass

Pour le lundi 22 Janvier 2024

I Suites approximantes d'un Delta de Dirac

Vers 1926-1927, le physicien Paul-Adrien-Marie Dirac eut l'idée d'introduire une « fonction » δ possédant deux propriétés surnaturelles : d'une part,

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty \quad (1)$$

d'autre part, pour toute fonction f « raisonnable »

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (2).$$

Cette « intégrale » n'a pas de sens pour nous, en ce sens qu'il faudrait définir une intégrale pour ce genre d'objet. Cette « fonction » δ échappe un peu aux mathématiques qu'on enseigne en prépa, comme elle a échappé d'ailleurs aux mathématiciens jusqu'à l'invention de la théorie des distribution par Laurent Schwartz vingt ans plus tard (ce qui compte vraiment pour définir δ est beaucoup plus (2) que (1)).

Ce qu'on peut comprendre ici par contre, c'est que l'idée de Dirac pose la question de savoir si on peut approcher la valeur $f(0)$ d'une fonction f à l'aide d'intégrales portant sur f, par exemple en utilisant des fonctions $x \mapsto u_n(x)$ telles que :

$$\text{Pour toute fonction } f \text{ « raisonnable » } \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx = f(0) \qquad (\dagger)$$

Dirac lui-même propose deux exemples de telles fonctions u_n :

- gratte-ciel ou porte : $u_n \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } |x| > 1/n, \\ n/2 \text{ si } |x| \leq 1/n \end{cases}$
- cloches : $u_n \ : x \mapsto \sqrt{n}\exp(-n\pi x^2)$

Q0) Combien valent les $\int_{\mathbb{R}} u_n$ dans ces deux cas ?

Pour simplifier, on se restreint dans ce qui suit à des fonctions u_n *positives*.

Q1) Justifier que ($\dagger$) appliquée à une fonction « raisonnable » donne $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx = 1$.

Déf. une suite de fonctions c.p.m. positives (u_n) est dite une *suite de Dirac* ssi elle vérifie les deux conditions suivantes :
(D1) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}} u_n = 1$
(D2) $\forall\, \delta > 0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Q2) Vérifier que les $u_n \ : x \mapsto \sqrt{n}\exp(-n\pi x^2)$ vérifient la déf. précédente.

Q3) On suppose que $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est *continue en* 0 *et bornée sur* $\mathbb{R}$. On considère :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx - f(0)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(0))u_n(x)dx\right| \qquad (\ddagger)$$

On fixe un $\varepsilon > 0$.

3.1.) Justifier qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\int_{[-\delta,+\delta]} |f(x) - f(0)|u_n(x)dx \leq \varepsilon/2$

3.2) En déduire qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0,\ \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)u_n(x)dx - f(0)\right| < \varepsilon$.

On a donc montré le

Lemme de Dirac Si (u_n) est une suite de Dirac, alors pour toute fonction f c.p.m. bornée sur $\mathbb{R}$ et continue en 0, on a :

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u_n(t)dt.$$

Q4) Justifier que pour toute fonction u c.p.m. positive d'intégrale 1, la suite (u_n) définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = nu(nx)$ est une suite de Dirac.

Q5) Si u est comme à la Q4 et est une fonction nulle en dehors d'un segment, toutes les (u_n) définies à la Q4) le sont aussi.
Justifier que d'une manière générale, si tous les (u_n) sont nulles en dehors d'un même segment $[-A, A]$, on peut enlever l'hyp. f bornée dans le lemme de Dirac.

II Un résultat de convergence uniforme pour la convolution par les suites de Dirac

Au §I, on a montré le « lemme de Dirac » (qui n'est bien sûr pas dû à Dirac) on a va ici montrer le :

Théorème : Soit (u_n) une suite de Dirac. Alors pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, *bornée* sur $\mathbb{R}$: **(C1)** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt$
(C2) Mieux la convergence donnée au (C1) est uniforme sur tout segment.
(C3) La (C1) et la (C2) se généralisent au cas où on ne suppose plus f *bornée*, mais qu'on suppose que les fonctions u_n sont *nulles en dehors d'un même segment* $[-A, A]$.

Q6) Démontrer la (C1) avec le lemme de Dirac appliqué à une fonction bien choisie.

Q7) Justifier que pour montrer la (C2), il suffit de montrer que la suite des fonctions $d_n\ :\ x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x-t)|u_n(t)dt$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Q8) On fixe un segment $K = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ et un $\varepsilon > 0$.
Justifier, à l'aide de *l'uniforme continuité* de f, qu'il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in K,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_{[-r,r]} |f(x) - f(x-t)|u_n(t)dt \le \varepsilon/2.$$

Q9) Justifier à l'aide du caractère borné de f, qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ indépendant de x tel que :

$$\forall\, n \ge n_0,\ \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} |f(x) - f(x-t)|u_n(t)dt < \varepsilon/2.$$

Q10) En déduire (C2).

Q11) Montrer ensuite comment le raisonnement précédent doit être modifié pour montrer (C3).

III Introduction au produit de convolution :

Déf. Pour deux fonctions f et g, l'intégrale (si elle est définie) $f*g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ s'appelle *produit de convolution de f par g*.

Q12) Interprétation concrète :

a) **L'exemple important de la convolution avec une porte :**
Pour chaque $a > 0$, on définit la fonction *porte* de largeur a et de hauteur $1/a$ comme :

$$\Pi_a\ :\ x \mapsto \begin{cases} 1/a & \text{si } |x| < a/2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, calculer $(f * \Pi_a)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Interprétation : en considérant $(f * \Pi_a)$ plutôt que f, on remplace en chaque point $x \in \mathbb{R}$, la valeur $f(x)$ par la *valeur moyenne* de f autour de x avec une largeur a. On peut ainsi modéliser une mesure imparfaite de la fonction f pour laquelle on a un « flou » de largueur a. Les détails de largeur ℓ petite devant a disparaissent, ceux de largeur grande devant a restent visibles. On peut faire la même chose en convolant f par une gaussienne et d'une manière générale, si on retrécit la taille de la porte ou de la gaussienne, on s'attend à davantage de précision. Or c'est justement ce qu'on a prouvé au II ! !
En effet, le résultat de la (C2) du théorème du § II se reformule alors :

Théorème reformulé : (C2) Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et si (u_n) est une suite de Dirac, alors $(f * u_n)$ CVU vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.
(C3) Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si (u_n) est une suite de Dirac où toutes les (u_n) sont nulles en dehors d'un même segment $[-A, A]$ fixé, alors $(f * u_n)$ CVU vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b) **Autre illustration avec Heaviside :** Soit $H : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(H * H)(x) = xH(x)$.

Q13) Deux propriétés de la convolution :

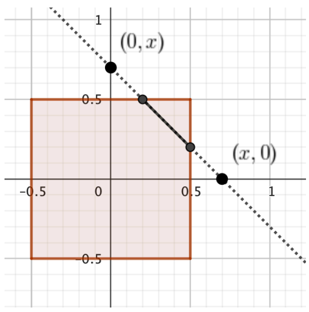
a) **Commutativité :** Soit f et g deux fonctions c.p.m. avec f bornée et g intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'alors les deux produits de convolutions $(f * g)(x)$ et $(g * f)(x)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ et sont égaux.

b) **Convolution d'une fonction continue à support compact avec u_n**
Montrer que si f est nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ et g est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$ alors $f * g$ est nulle en dehors d'un segment que l'on précisera.
Terminologie : Le support d'une fonction f est l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$. Ainsi si f est nulle en dehors de $[-A, A]$, le support de f est inclus dans $[-A, A]$. On dit que f est *à support compact.*

Un dessin qui explique les deux propriétés précédentes et plus : Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = f(x).g(y)$. Ainsi $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et son graphe est une surface d'équation $z = h(x, y)$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour chaque x, lorsqu'on calcule $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$, on calcule en fait l'intégrale de h le long du chemin, paramétré par $t \mapsto (t, x-t)$ i.e. la droite passant par $(0, x)$ et $(x, 0)$ de pente -1 dans $\mathbb{R}^2$.

Par exemple si f et g sont deux fonction porte Π_1, alors $h(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \text{ et } |y| < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc le graphe de h est un carré, et le produit de convolution $(f * g)(x)$ représente, pour chaque x, longueur du segment dessiné ci-dessous :



IV Application au théorème d'approximation de Weierstrass (1885)

La démonstration suit l'idée originale de Weierstrass.. qui connaissait donc les « suites de Dirac » bien avant Dirac.

Q14) Une suite de Dirac polynomiale sur son support : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$, et on note;

$$u_n \ : \ t \ \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}, & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [-1,1] \end{cases}$$

On va montrer que (u_n) est une suite de Dirac.

a) On rappelle l'équivalent des intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
En déduire un équivalent de λ_n

b) Soit $\delta < 1$.
En majorant $\int_{|t| \geq \delta} (1-t^2)^n dt = 2 \int_{\delta}^{1} (1-t^2)^n dt$, montrer que :

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_{|t| \geq \delta} (1-t^2)^n dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Conclure que (u_n) est une suite de Dirac.

Q15) Application à l'approximation des fonctions continues à support dans $[-1/2, 1/2]$
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support dans $[-1/2, 1/2]$. (En particulier $f(1/2) = f(-1/2) = 0$).
(i) Montrer que $(f * u_n)$ est une fonction polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$, nulle en dehors de $[-3/2, 3/2]$.
(ii) Montrer que la suite de fonctions $(f * u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1/2, 1/2]$.

Q16) Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. On fixe un segment $[c,d]$ avec $c < a < b < d$. On prolonge f par une fonction affine sur $[c,a]$ et $[b,d]$ de sorte que $f(c) = f(d) = 0$ et on prolonge encore f par zéro à l'extérieur de $[c,d]$.
En déduire le :

> **Théorème de Weierstrass polynomial :** pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ il existe une suite de fonctions polynomiales qui CVU vers f sur $[a,b]$.

Q17) Bonus : à l'aide de la suite (u_n) montrer qu'il n'existe pas de fonction g continue bornée telle que pour tout fonction f intégrable on ait $f * g = f$ (un élément neutre pour la convolution).
Indication – On pourra considérer la limite des $u_n(0)$.