

DM 9 : suites de Dirac et le théorème de Weierstrass, solution

Q0) • Pour le gratte-ciel, $u_n : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } |x| > 1/n, \\ n/2 & \text{si } |x| \leq 1/n \end{cases}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n = n/2 \cdot (1/n + 1/n) = 1$.

• Pour la cloche $I_n := \int_{-\infty}^{+\infty} u_n = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-n\pi x^2) dx$. On pose $t = \sqrt{n\pi}x$ dans cet intégrale convergente, on obtient $I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$ par la valeur connue de l'intégrale de la gaussienne.

Q1) On ne sait pas si (†) est supposée s'appliquer à toutes les $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, mais en tous cas, si on prend comme fonction raisonnable pour f la fonction qui est constante égale à 1, la formule (†) donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n = f(0) = 1$$

Q2) On a déjà vu à la question Q0) que les u_n vérifient la condition (D1).

Pour montrer qu'elles vérifient la condition (D2) un changement de variable suffit : dans $\int_{\delta}^{+\infty} u_n(x) dx = \sqrt{n} \int_{\delta}^{+\infty} \exp(-n\pi x^2) dx$ on pose $t = \sqrt{n}x$ ce qui donne :

$$\int_{\delta}^{+\infty} u_n(x) dx = \int_{\sqrt{n}\delta}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) dt$$

et

$$\int_{\sqrt{n}\delta}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

comme reste d'intégrale convergente. De même pour $\int_{-\infty}^{-\delta} u_n = \int_{\delta}^{+\infty} u_n$ par parité.

Pour mieux comprendre comment on construit de telles suites voir Q4).

Q3) 3.1) Comme f est continue en 0, on a un $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [-\delta, +\delta]$, $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon/2$. En multipliant par $u_n(t) \geq 0$ et en intégrant sur $[-\delta, +\delta]$, on obtient :

$$\int_{[-\delta, +\delta]} |f(x) - f(0)| u_n(x) dx \leq \varepsilon/2 \int_{[-\delta, +\delta]} u_n \quad (1)$$

Comme $u_n \geq 0$ sur \mathbb{R} , on sait que $\int_{[-\delta, +\delta]} u_n \leq \int_{\mathbb{R}} u_n = 1$ (2)

On déduit de (1) et (2) que :

$$\int_{[-\delta, +\delta]} |f(x) - f(0)| u_n(x) dx \leq \varepsilon/2$$

Remarque : certains ont été essayé de traiter cette condition sans utiliser la continuité de f en 0, ni aucune propriété spécifique de la valeur $f(0)$, ce qui n'est pas raisonnable puisque c'est la limite qu'on doit trouver à la fin !

3.2) Suivant le 3.1) on découpe l'intégrale en deux parties :

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$, comme f est bornée sur \mathbb{R} , en majorant :

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x)| + |f(0)| \leq 2\|f\|_{\infty},$$

on obtient :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]} |f(x) - f(0)| u_n(x) dx \leq 2\|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]} u_n(x) dx \quad (3)$$

Par la propriété (D2) des suites de Dirac, on a un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]} u_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty},$$

ce qui, dans (3) donne :

$$\forall n \geq n_0, \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, +\delta]} |f(x) - f(0)| u_n(x) dx < \varepsilon/2 \quad (4)$$

En ajoutant l'inégalité (4) et l'inégalité de la question 3.1), on obtient :

$$\forall n \geq n_0, \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(0)| u_n(x) dx < \varepsilon$$

ce qui donne avec l'égalité (†) :

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) u_n(x) dx - f(0) \right| < \varepsilon$$

On a bien vérifié la définition de la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) u_n(t) dt = f(0)$.

Q4) Une construction plus générale de suites de Dirac

Cette question est très proche de la Q2, simple changement de variable dans l'intégrale.

• Pour (D1), le changement de variable $t = nx$ donne, avec $ndx = dt$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) dx \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} nu(nx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = 1.$$

• Soit $\delta > 0$. comme $\int_{\mathbb{R}} u_n = 1$ et que $\int_{\mathbb{R}} u_n = \int_{[-\delta, \delta]} u_n + \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} u_n$, pour montrer (D2) il est équivalent de montrer que :

$$\int_{[-\delta, +\delta]} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (D2')$$

Or avec le même changement de variable $t = nx$:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} u_n(x) dx = \int_{-n\delta}^{n\delta} u(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = 1$$

ce qui démontre bien que (D2') (et donc (D2)) est vérifiée.

Q5) On suppose u nulle en dehors de $[-A, A]$. Si $|x| > A$, alors pour tout $n \geq 1$, $|nx| > A$ donc $u_n(x) = 0$, donc toutes les u_n pour $n \geq 1$ sont nulles en dehors de $[-A, A]$.

Suivant l'énoncé on suppose maintenant plus généralement que (u_n) est une suite de Dirac telles que toutes les u_n sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$.

On ne change donc pas la valeur de $\int_{\mathbb{R}} f u_n$ en remplaçant $f|_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]}$ par la fonction nulle.

La fonction \tilde{f} ainsi définie est alors c.p.m. sur \mathbb{R} et bornée, on peut lui appliquer le lemme de Dirac.

Q6) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $g : t \mapsto f(x - t)$. Alors g est continue bornée sur \mathbb{R} . Le lemme de Dirac dit que :

$$g(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) u_n(t) dt$$

Or $g(0) = f(x)$ donc la formule précédente s'écrit :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) u_n(t) dt.$$

Q7) Notons $I_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt$. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} .

On veut montrer que $\sup_{x \in [a, b]} |I_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or comme $\int_{\mathbb{R}} u_n = 1$, on peut écrire

$$|I_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)u_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)u_n(t)dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))u_n(t)dt \right|$$

et par inégalité triangulaire pour les intégrales on en déduit que :

$$|I_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|u_n(t)dt = d_n(x)$$

Ainsi par majoration :

$$\|I_n - f\|_{\infty, [a, b]} \leq \|d_n\|_{\infty, [a, b]},$$

pour montrer (D2) il suffit donc de montrer que (d_n) CVU vers zéro sur chaque segment $[a, b]$.

Q8) On reprend l'idée de la Q3.1) mais attention cette fois,

- On veut un $r > 0$ qui « marche » pour tous les $x \in K$, on va avoir besoin de l'*uniforme continuité* de f sur les segments. Celle-ci est acquise par théorème de Heine : une fonction continue sur un segment est uniformément continue.
- En outre il faut faire attention que si x varie dans K et $|t| < r$ alors $x - t$ peut sortir de K on a donc besoin de prendre un segment « de sécurité » un peu plus gros que K .

Précisément : soit $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé. Soit $K' = [a - 1, b + 1] \supset K$. Comme f est continue sur le segment K' , il existe un $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in (K')^2, |x - y| < r \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \quad (1)$$

Quitte à remplacer r par $\min(r, 1)$, on suppose que $r \leq 1$. Alors pour tout $x \in K$, et tout $t \in [-r, r]$, on a $x - t \in K'$ et en appliquant (1) à $x \in K \subset K'$ et $y = x - t \in K'$, on a $|x - y| < r$ donc

$$\forall x \in K, \forall t \in [-r, r], |f(x) - f(x-t)| < \varepsilon/2 \quad (2)$$

En multipliant par $u_n(t) > 0$ et en intégrant l'inégalité (2) pour $t \in [-r, r]$, on a :

$$\forall x \in K, \int_{-r}^r |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt \leq \int_{-r}^r \varepsilon/2 u_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

Q9) Cette partie de la dém. est identique à celle de la Q3.2). L'essentiel (pour la dém. de la CVU à la question suivante) est bien que le n_0 soit le même pour tous les $x \in K$ (en fait c'est le même pour tous les $x \in \mathbb{R}$).

En effet, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, comme f est bornée sur \mathbb{R} ,

$$|f(t) - f(x-t)| \leq |f(t)| + |f(x-t)| \leq 2\|f\|_{\infty},$$

on obtient :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-r, +r]} |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt \leq 2\|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-r, +r]} u_n(t)dt \quad (1)$$

On applique alors la propriété (D2) des suites de Dirac pour obtenir la conclusion comme au Q3.2).

Q10) D'après les deux questions précédentes, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [a, b], \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Ceci signifie bien, avec les notations de la Q7, que la suite de fonctions (d_n) CVU sur $[a, b]$ vers la fonction nulle, et d'après la même Q7, cela montre la (C2) du Théorème.

Q11) On suppose maintenant que toutes les fonctions u_n sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$. Le raisonnement de la Q8 s'applique encore puisqu'on n'y a pas utilisé le fait que f était bornée sur \mathbb{R} . Reste à modifier celui de la Q9. Or en prenant SRdG $r < A$, on a ici :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-r, +r]} |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt = \int_r^A |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt + \int_{-A}^{-r} |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt \quad (1)$$

Or si $x \in [a, b]$ et $t \in [r, A]$ alors $-t \in [-A, -r]$ et $x-t \in [a-A, b-r]$.

Ainsi comme f est continue sur les segments $[r, A]$ et $[a-A, b-r]$, il existe un M tel que pour tout $t \in [r, A]$ et tout $x \in [a, b]$, $|f(t) - f(x-t)| \leq M$.

Ainsi la première intégrale à droite dans (1) peut se majorer comme suit :

$$\exists M_1 > 0, \forall x \in [a, b], \int_r^A |f(t) - f(x-t)|u_n(t)dt \leq M \int_r^A u_n(t)dt$$

On majore de même la seconde intégrale à droite de (1) et on conclut avec la propriété (D2) des suites de Dirac.

Q12) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * \Pi_a)(x) = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x-t)dt = \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} f(t)dt$.

Autrement dit, en tout point $(f * \Pi_a)(x)$ représente la valeur moyenne de f sur le voisinage $[x-a/2, x+a/2]$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $(H * H)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-t)H(t)dt$.

Comme $H(t) = 0$ pour $t < 0$, et $H(x-t) = 0$ pour $x-t < 0$ i.e. $t > x$,

Si $x < 0$, l'intégrande est donc toujours nulle et donc $(H * H)(x) = 0$.

Pour $x \geq 0$, on peut considérer seulement l'intégrale sur $[0, x]$, donc :

$$(H * H)(x) = \int_0^x H(x-t)H(t)dt$$

Sur cet intervalle l'intégrande est constante égale à 1 donc $(H * H)(x) = x.1$ pour $x \geq 0$.

Au total, on a bien montré que $(H * H)(x) = xH(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q13) a) Si f est bornée, et g est intégrable alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x : t \mapsto |f(x-t)g(t)|$ vérifie $0 \leq \varphi_x(t) \leq M|g(t)|$ donc φ_x est intégrable sur \mathbb{R} par majoration. Ainsi $(f * g)(x)$ est bien définie.

Dans l'intégrale $f * g(x)$, on fait le changement de variable $u = x-t$ et on obtient $(g * f)(x)$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Si $t \in [-A, A]$ et $x-t \in [-B, B]$ alors par inégalité triangulaire $|x| = |x-t+t| \leq |x-t|+|t| \leq A+B$.

Donc si $|x| > A+B$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a ou bien $t \notin [-A, A]$ ou bien $x-t \notin [-B, B]$ et dans les deux cas $f(t)g(x-t) = 0$.

Ainsi si $|x| > A+B$, $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = 0$.

Ainsi $f * g$ est nulle en dehors du segment $[-(A+B), A+B]$.

Q14) a) Dans $\lambda_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$ on pose $u = \arcsin(t)$ donc $t = \sin(u)$ et $dt = \cos(u)du$.

Alors $\lambda_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2(u))^n \cos(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)du = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)du$ (par parité).

Ainsi, avec l'équivalent donné pour W_n , on a :

$$\lambda_n = 2W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

b) Soit $\delta < 1$, par décroissance de $t \mapsto (1-t^2)^n$ sur $[\delta, 1]$, on a $\forall t \in [\delta, 1], (1-t^2)^n \leq (1-\delta^2)^n$ et donc en intégrant cette inégalité :

$$\int_{\delta}^1 (1-t^2)^n dt \leq (1-\delta).(1-\delta^2)^n$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_{|t| \geq \delta} (1-t^2)^n dt \leq \frac{1}{\lambda_n} (1-\delta).(1-\delta^2)^n =: M_n \quad (1)$$

Or avec l'équivalent trouvé au (i), $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{\pi}} (1-\delta).(1-\delta^2)^n$ et comme $(1-\delta)^2 \in]0, 1[$, par croissance comparée, $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui avec (1) donne bien la conclusion souhaitée :

$$\frac{1}{\lambda_n} \int_{|t| \geq \delta} (1-t^2)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(c) On vérifie les propriétés (D1) et (D2) des suites de Dirac.

• Pour (D1) : on a $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t) dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1-t^2)^n dt = \frac{\lambda_n}{\lambda_n} = 1$.

• Pour (D2) : soit $\delta > 0$.

Si $\delta \geq 1$ alors $\int_{|t| \geq \delta} u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\delta < 1$, alors $\int_{|t| \geq \delta} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par (ii).

Ainsi (u_n) est bien une suite de Dirac.

Q15 (i) Comme u_n est nulle en dehors de $[-1, 1]$ et f est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, on sait par Q13 que $f * u_n$ est nulle en dehors de $[-3/2, 3/2]$.

Comme f est à support dans $[-1/2, 1/2]$, $f * u_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) u_n(x-t) dt$.

Soit $x \in [-1/2, 1/2]$. Alors pour chaque $t \in [-1/2, 1/2]$, $x-t \in [-1, 1]$, on sait donc que

$$u_n(x-t) = \frac{1}{\lambda_n} (1-(x-t)^2)^n$$

et :

$$f * u_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1/2}^{1/2} f(t) (1-(x-t)^2)^n dt \quad (1)$$

En écrivant la fonction polynomiale $x \mapsto (1-(x-t)^2)^n$ sous la forme :

$$(1-(x-t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t) x^k,$$

où les $t \mapsto a_k(t)$ sont aussi des fonctions polynomiales, on déduit de (1) que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f * u_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_{-1/2}^{1/2} f(t) a_k(t) dt \right) x^k$$

ce qui est bien l'écriture d'une fonction *polynomiale* en x , de degré au plus $2n$.

(ii) Comme (u_n) est une suite de Dirac et que f est continue à support compact donc bornée sur \mathbb{R} , le théorème de Dirac du § II (C2) s'applique directement (on peut aussi utiliser la (C3) si on préfère puisque les (u_n) sont aussi nulles en dehors de $[-1, 1]$) : $f * u_n$ CVU vers f sur tout segment, en particulier sur $[-1/2, 1/2]$.

Q16) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine telle que $\varphi(-1/2) = c$ et $\varphi(1/2) = d$.

Soit $\tilde{f} := f \circ \varphi$. Alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et \tilde{f} est à support inclus dans $[-1/2, 1/2]$.

D'après la question précédente, on sait alors que la suite $(\tilde{f} * u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales sur $[-1/2, 1/2]$, nulles en dehors de $[-3/2, 3/2]$, qui converge uniformément vers \tilde{f} sur $[-1/2, 1/2]$.

Or comme φ est une fonction affine non constante, donc bijective, en notant $p_n := \tilde{f} * u_n$, on peut considérer les fonctions $q_n = p_n \circ \varphi^{-1}$, qui, par composition de fonctions polynomiales, sont polynomiales sur le segment $[c, d]$ et la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge uniformément vers f sur $[c, d]$ et donc en particulier sur $[a, b]$.

On vient de démontrer le :

Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ est la limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Q17) *Par l'absurde* si une telle fonction g existait. Alors en particulier, avec la suite (u_n) définie ci-dessus, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n * g = u_n$$

Comme (u_n) est une suite de Dirac, par le lemme de Dirac, qui s'applique puisque g est bornée, ou parce que u_n est à support compact, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $u_n * g(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x)$ donc en particulier pour $x = 0$, on aurait :

$$u_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(0)$$

Or $u_n(0) = \frac{1}{\lambda_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{\pi}}$ donc $u_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, *contradiction*.