Souvenirs DM 8 Pb 1 : produits infinis

Un théorème de convergence des produits infinis dans $\mathbb{C}$:

Théorème : *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1+a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\sum |a_n|$ converge. Soit $(P_n) = (\prod_{k=0}^n z_k)$. Alors :*

(i) La suite (P_n) converge dans $\mathbb{C}$ vers une limite P.

(ii) Cette limite P est nulle si, et seulement si, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$.

Les ingrédients de la preuve (on n'a pas de ln dans $\mathbb{C}$) ! On suppose les z_n tous non nuls.

- D'abord la suite $(|P_n|)$ est bornée par majoration : $\ln\ |P_n| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$
- Ensuite idée : $|P_n - P_{n-1}| = |P_{n-1}||a_n| \le M|a_n|$ et CV de la série télescopique.
- Le (ii) s'obtient en introduisant $Q_n = \prod_{k=0}^n z_k^{-1} = \prod_{k=0}^n (1+b_k)$ et en montrant la CV de Q_n grâce à $|b_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} |a_k|$ et le (i).

Un point de vue différent sur l'obtention du D.S.E. de $\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k z)$

Euler s'occupe au chapitre 10 de son *Introduction à l'Analyse* d'une formule beaucoup plus générale qu'il écrit

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

il s'agit, pour lui, de calculer $A, B, \ldots$ en fonction de $a, b, \ldots$. Pour lui, "il faut que, comme on le sait en Algèbre", A soit égal à la somme de toutes les grandeurs $a, b, \ldots$, donc égal à $a+\ b+\ldots$, B soit égal égal à la somme des produits deux à deux de ces grandeurs, donc à $ab+ac+ad+bc+bd+cd+\ldots$, C soit égal à la somme de leurs produits trois à trois, donc à $abc+abd+\ bcd+acd+\ldots$, etc.

Le problème, en notations modernes, est donc de justifier la formule « algébrique »

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1+u_i) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \quad (\dagger)$$

où pour tout $n \ge 1$

$$A_n = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} u_{i_1}\ldots u_{i_n},$$

dans l'hypothèse bien sûr où $\sum u_n$ est ACV.

Cette justification peut se faire directement avec la propriété des familles sommables et la preuve du théorème en orange ci-dessus pour les produits infinis : c'est un exercice assez minutieux sur ces familles sommables !

En remplaçant u_i ici par $q^i z$, on a immédiatement :

$$A_n = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} (-1)^n q^{i_1+\cdots+i_n} z^n.$$

et donc :

$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \Big(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} q^{i_1+\cdots+i_n}\Big) z^n.$$

Ce qui montre bien que f est D.S.E. Pour coïncider avec l'énoncé, il resterait à voir que :

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} q^{i_1+\cdots+i_n} = \frac{q^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)}$$

N.B. Dans le D.M. 8, on évite cette approche frontale du développement du produit grâce à l'équation fonctionnelle vérifiée par $f(z)$.