D.M. 8 : séries entières et intégrales à paramètres, solutions

Problème 1 : un produit infini en variable complexe et son D.S.E. :

1) a) Avec l'indication :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f_n(z)| = \prod_{k=1}^{n} \left|1-q^k z\right| \le \prod_{k=1}^{n} \left(1+|z|\,|q|^k\right) \le \prod_{k=1}^{n} \exp\left(|z|\,|q|^k\right) = \exp\left(|z| \sum_{k=1}^{n} |q|^k\right) \le \exp \frac{|z|\,|q|}{1-|q|}.$$

Comme le majorant est indépendant de n, on a bien montré que la suite $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Fixons $z \in \mathbb{C}$ et, selon a), notons M un majorant de la suite $\left(|f_n(z)|\right)$.
Pour $n \ge 2$, $\left|f_n(z) - f_{n-1}(z)\right| = \left|-q^n z\, f_{n-1}(z)\right| \le M\,|z|\,|q|^n$, qui est le terme général d'une série convergente.
Ainsi, la série $\sum\left(f_n(z) - f_{n-1}(z)\right)$ est absolument convergente, donc convergente.
Par l'équivalence suites-séries, on en déduit que la suite $\left(f_n(z)\right)$ converge.

c) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(z) = (1-qz)\, f_n(qz)$.
Le passage à la limite pour n tendant vers l'infini donne $f(z) = (1-qz)\, f(qz)$.

2) a) $(1-qz)\, f(qz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{n+1} z^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})\, q^n z^n.$

Le 1.c) et l'unicité du d.s.e. donnent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = (a_n - a_{n-1})\, q^n$, soit $a_n = -\dfrac{q^n}{1-q^n}\, a_{n-1}$.

b) Récurrence évidente compte tenu de $a_0 = f(0) = 1$ et de la relation du a)

3) a) Pour $q \ne 0$, $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{|q|^{n+1}}{|1-q^{n+1}|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $+\infty$.
C'est évidemment encore vrai pour $q = 0$ ($a_n = 0$ pour $n \ge 1$).

b) Le même calcul qu'au 2.a) avec g à la place de f donne $(1-qz)\, g(qz) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})\, q^n z^n$.
Mais $(a_n - a_{n-1})\, q^n = a_n$ d'après la définition de la suite (a_n), donc $(1-qz)\, g(qz) = g(z)$.

c) Le b) donne par récurrence évidente : $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(z) = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1-q^k z)\right) g(q^n z) = f_n(z)\, g(q^n z)$.
Mais $f_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$ par définition de f et $g(q^n z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0) = 1$ par continuité en 0 de g (somme d'une série entière). On obtient donc $g(z) = f(z)$ par passage à la limite.

4) a) Comme $|z| < \dfrac{1}{q}$, tous les facteurs dans $f_n(z)$ sont non nuls et on peut écrire $\ln\left|f_n(z)\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left|1-q^k z\right|$.
Mais $\left|1-q^k z\right| \ge 1 - |q|^k |z| > 0$, d'où le résultat par croissance du logarithme et addition des inégalités.

b) z étant fixé, $\ln\left(1-|q|^k|z|\right) \underset{k\to\infty}{\sim} -|q|^k|z|$, qui est le terme général d'une série géométrique négative convergente. Il en résulte que la série $\sum \ln\left(1-|q|^k|z|\right)$ converge. Notons S sa somme.
Le passage à l'exponentielle puis le passage aux limites quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité du a) donne $\left|f(z)\right| \ge e^S > 0$, donc $f(z) \ne 0$.

5) Si $q = 0$, f est constante de valeur 1, donc ne s'annule jamais. On suppose maintenant $q \ne 0$.
Les $\dfrac{1}{q^k}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ sont des zéros de f puisque $f_n\left(\dfrac{1}{q^k}\right) = 0$ pour $n \ge k$. On va montrer que ce sont les seuls.

Soit donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$. Le 1.c) donne par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 = f(z) = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 - q^k z\right)\right) f(q^n z)$.
Fixons alors n assez grand pour que $\left|q^n z\right| < \dfrac{1}{|q|}$.
Selon 4., $f(q^n z) \neq 0$; il existe donc $k \in [[1, n]] \subset \mathbb{N}^*$ tel que $z = \dfrac{1}{q^k}$, ce qu'on voulait démontrer .
Pour le bonus : On reprend les arguments du 1)a) et 1) b) cf. page Souvenir.

Problème 2

6) La fonction nulle appartient évidemment à E ; on sait d'autre part que la continuité et l'intégrabilité sont conservées par combinaison linéaire. E est donc un sous-e.v. de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$.
Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+x}$ (où $x \in \mathbb{R}_+^*$) l'est aussi puisque $\left|\dfrac{f(t)}{t+x}\right| \leq \dfrac{1}{x}|f(t)|$.
On en déduit que $\mathscr{L}_c^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ est inclus dans E.

7) a) $\left|\dfrac{p_\alpha(t)}{t+x}\right| = \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+x}$, qui est équivalent à $\dfrac{1}{x}\, t^{\alpha-1}$ quand t tend vers 0 et à $t^{\alpha-2}$ quand t tend vers $+\infty$.

On en déduit que p_α appartient à E si et seulement si $1-\alpha < 1$ et $2-\alpha > 1$, c'est-à-dire $0 < \alpha < 1$.
b) Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient par le changement de variable $t = xu$:
$Tp_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+x}\, dt = x^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\, du = \left(\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\, du\right) p_\alpha(x)$.
Ainsi, $Tp_\alpha = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\, du\right) p_\alpha = Tp_\alpha(1)\, p_\alpha$.

8) Pour t fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(t)}{t+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $(x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{f(t)}{t+x}\right| \leq \dfrac{|f(t)|}{t+a}$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{t+a}$ est par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, Tf est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le théorème de continuité par rapport au paramètre.

9) a) Pour t fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(t)}{t+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, pour $x \geq 1$ (par exemple), $\left|\dfrac{f(t)}{t+x}\right| \leq \dfrac{|f(t)|}{t+1}$, fonction indépendante de x intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après le théorème de convergence dominée, $Tf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $xTf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xf(t)}{t+x}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t/x}\, dt$. Le même raisonnement qu'au a), avec ici f pour limite simple et $|f|$ pour fonction intégrable dominante, montre que $xTf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

c) On vérifie en effet que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^k}{x^{k+1}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-(-t/x)^n}{1+t/x} = \frac{1}{t+x} - (-1)^n \left(\frac{t}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{t+x}$.

Supposons maintenant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
En multipliant par $f(t)$ l'égalité précédente et en intégrant sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} \int_0^{+\infty} t^k f(t)\, dt + \frac{(-1)^n}{x^n} \int_0^{+\infty} \frac{t^n f(t)}{t+x}\, dt.$$

Le a) appliqué à la fonction $t \mapsto t^n f(t)$, qui est par hypothèse dans $\mathscr{L}_c^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et donc aussi dans E, montre que la dernière intégrale de cette égalité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il vient donc, après réindexation :

$$Tf(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{x^k} \int_0^{+\infty} t^{k-1} f(t)\, dt + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Il s'agit du développement limité d'ordre n de Tf en $+\infty$.

10) a) $Tf(a+h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+a+h}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+a} \cdot \frac{f(t)}{1+\frac{h}{t+a}}\, dt.$

Comme $\left|\dfrac{h}{t+a}\right| \le \dfrac{|h|}{a} < 1$, on peut écrire $\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{t+a}} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p h^p}{(t+a)^p}$, puis $Tf(a+h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} g_p(t)\right) dt$,

avec $g_p(t) = \dfrac{(-1)^p h^p f(t)}{(t+a)^{p+1}}$.

. $|g_p(t)| = \dfrac{|h|^p |f(t)|}{(t+a)^{p+1}} \le \dfrac{|h|^p}{a^p} \cdot \dfrac{|f(t)|}{t+a}$. Par comparaison, chaque fonction g_p est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

. $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_p(t)|\, dt \le \left(\frac{|h|}{a}\right)^p \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+a}\, dt$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue, ce qui donne :

$$Tf(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_p(t)\, dt = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+a)^{p+1}}\, dt\right) h^p.$$

b) On a ainsi démontré que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction Tf est développable en série entière au point a.

On peut notamment en déduire que Tf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11) Soient $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\quad e^{-xt}|f(t)| \underset{t\to0}{\sim} |f(t)| \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{|f(t)|}{t+1}$ et $e^{-xt}|f(t)| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{|f(t)|}{t+1}\right)$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t+1}$ est par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; les relations précédentes montrent donc qu'il en est de même pour la fonction $t \mapsto e^{-xt} f(t)$. Ainsi, f appartient à F, ce qu'il fallait prouver.

12) a) Pour la continuité de Lf, on raisonne exactement comme pour Tf . : la fonction $x \mapsto e^{-xt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$, $|e^{-xt} f(t)| \le e^{-at}|f(t)|$ et la fonction $t \mapsto e^{-at}|f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour la limite de Lf en $+\infty$, on montre exactement comme pour Tf à l'aide du théorème de convergence dominée que $Lf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)(t+x)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fausse intégrale généralisée en 0 et règle de Riemann avec exposant 2 en $+\infty$), donc $f \in E$.

Ensuite,

(M1) $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1}\, dt \ge \int_0^{1/x} \frac{e^{-xt}}{t+1}\, dt \ge \frac{1}{e} \int_0^{1/x} \frac{1}{t+1}\, dt = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{e}.$

Cette minoration montre que $Lf(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque : Avec un peu plus de travail, on peut montrer qu'ici $L(f)(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$.

c) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, une application immédiate du théorème de convergence dominée, avec domination par $|f|$, montre que $Lf(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

13) a)
$$\int_a^b e^{-xu} g_n(u)\, du = \int_a^b \left(e^{-xu} \int_{1/n}^n e^{-ut} f(t)\, dt\right) du = \int_a^b \left(\int_{1/n}^n e^{-(t+x)u} f(t)\, dt\right) du.$$
$$= \int_{1/n}^n \left(\int_a^b e^{-(t+x)u} f(t)\, du\right) dt = \int_{1/n}^n f(t) \left(\frac{e^{-(t+x)a}}{t+x} - \frac{e^{-(t+x)b}}{t+x}\right) dt.$$
$$= e^{-xa} \int_{1/n}^n \frac{e^{-at} f(t)}{t+x}\, dt - e^{-xb} \int_{1/n}^n \frac{e^{-bt} f(t)}{t+x}\, dt.$$

b) Par construction, la suite (g_n) converge simplement vers Lf sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la suite des fonctions $u \mapsto e^{-xu} g_n(u)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, et *a fortiori* sur $[a,b]$, vers la fonction $u \mapsto e^{-xu} Lf(u)$.

Pour $u \in [a,b]$, $|e^{-xu} g_n(u)| \leq |g_n(u)| \leq \displaystyle\int_{1/n}^{n} e^{-ut}\,|f(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-ut}\,|f(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-at}\,|f(t)|\,dt$, qui est une constante, donc une fonction intégrable sur $[a,b]$. D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_a^b e^{-xu} g_n(u)\,du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b e^{-xu} Lf(u)\,du.$$

D'autre part, $\left|\dfrac{e^{-at} f(t)}{t+x}\right| \leq \left|\dfrac{f(t)}{t+x}\right|$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at} f(t)}{t+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et par conséquent $\displaystyle\int_{1/n}^{n} \frac{e^{-at} f(t)}{t+x}\,dt$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} f(t)}{t+x}\,dt$ quand n tend vers $+\infty$; il en est de même pour l'autre intégrale du second membre de l'égalité du a).

Le passage aux limites quand n tend vers l'infini dans cette égalité conduit alors au résultat demandé.

c) La définition même de l'intégrabilité au sens de Lebesgue montre que $|f|$, comme f, appartient à E.

On peut donc appliquer l'égalité du b) à $|f|$ plutôt qu'à f. Par une majoration grossière, mais suffisante, on en tire, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_a^b e^{-xu} L|f|(u)\,du \leq 2\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+x}\,dt, \text{ qui ne dépend pas de } a \text{ et } b.$$

Cela montre, par majoration des intégrales partielles, que la fonction positive $u \mapsto e^{-xu} L|f|(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

En outre, $|Lf| \leq L|f|$ d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, donc $u \mapsto e^{-xu} Lf(u)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et cela pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a ainsi démontré que Lf appartient à F

d) x étant toujours fixé, la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{t+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; en particulier, elle appartient à E, et *a fortiori* à F. On peut par conséquent lui appliquer les résultats des questions 12 c) et 12.a), ce qui donne directement :

$$Lg(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} f(t)}{t+x}\,dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt \quad\text{et}\quad Lg(b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} f(t)}{t+x}\,dt \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Compte tenu du résultat du c), en passant à la limite dans l'égalité du b) pour a tendant vers 0 puis pour b tendant vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xu}\, Lf(u)\,du = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt, \text{ c'est-à-dire } L(Lf)(x) = Tf(x). \quad \text{Ainsi, } L(Lf) = Tf.$$

14) On sait que, pour $\alpha \in]0,1[$, $p_\alpha \in E$, donc, d'après 13.d), $L(Lp_\alpha) = Tp_\alpha$ et en particulier $L(Lp_\alpha)(1) = Tp_\alpha(1)$.

D'une part, $Tp_\alpha(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du.$

D'autre part

$$\begin{aligned}
L(Lp_\alpha)(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-u}\, Lp_\alpha(u)\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ut}\, t^{\alpha-1}\,dt\right) du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1}{u^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-s}\, s^{\alpha-1}\,ds\right) du \quad \text{par chgt de var. } s = ut, ds = udt \\
&= \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} e^{-u}\, u^{-\alpha}\,du = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

L'égalité demandée en résulte.

15) a) Notons dans cette question $\psi(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1}\cdot$ On vérifie d'abord que ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, car $te^{i\theta} = -1$, avec $t \in \mathbb{R}_+^*$, conduirait à $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui est exclu.

Ensuite, $|\psi(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$, avec $1-\alpha<1$ et $|\psi(t)| = \left|\dfrac{t^{\alpha-1}}{t+e^{-i\theta}}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$, avec $2-\alpha>1$.
D'après les règles de Riemann, on en déduit que ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Le nombre α étant fixé, notons maintenant $\psi(\theta,t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1}$, $\Psi(\theta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(\theta,t)\,dt$

Notons aussi $\Phi(\theta) = \varphi(\alpha,\theta) = e^{i\theta\alpha}\Psi(\theta)$.

On va montrer que Φ est une fonction constante en calculant Φ' à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

• D'abord, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ la fonction $\theta\mapsto\psi(\theta,t)$ est de classe C^1 sur $]-\pi,\,\pi[$, avec :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta,t) = -\frac{it^\alpha e^{i\theta}}{(te^{i\theta}+1)^2}$$

• D'autre part, comme

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta,t)\right| = \frac{t^\alpha}{|te^{i\theta}+1|^2}$$

si on fixe un $a\in\,]0,\pi[$. Pour $(\theta,t)\in[-a,\,a]\times\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :
$|te^{i\theta}+1|^2 = t^2+2t\cos\theta+1 \geq t^2+2t\cos a+1 = (t+\cos a)^2+\sin^2 a \geq \sin^2 a > 0$.
Par conséquent

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta,t)\right| \leq \frac{t^\alpha}{t^2+2t\cos a+1}$$

le majorant est une fonction indépendante de θ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, puisqu'elle est prolongeable par continuité en 0 (car $\alpha>0$) et équivalente à $\dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$ en $+\infty$, avec $2-\alpha>1$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre Ψ est de classe C^1 sur $]-\pi,\,\pi[$, et $\Psi'(\theta) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{it^\alpha e^{i\theta}}{(te^{i\theta}+1)^2}\,dt.$

- Ensuite, par multiplication Φ est aussi de classe C^1 sur $]-\pi,\,\pi[$, avec :

$$\Phi'(\theta) = i\alpha e^{i\theta\alpha}\,\psi(\theta) + e^{i\theta\alpha}\,\psi'(\theta) = ie^{i\theta\alpha}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1} - \frac{t^\alpha e^{i\theta}}{(te^{i\theta}+1)^2}\right)dt.$$

On reconnaît dans l'intégrale la dérivée de la fonction $t\mapsto\dfrac{t^\alpha}{te^{i\theta}+1}$, laquelle tend vers 0 en 0 (puisque $\alpha>0$) et en $+\infty$ (puisque $\alpha<1$). On en déduit que $\Phi'(\theta)=0$ et donc que Φ est constante sur l'intervalle $]-\pi,\,\pi[$ (OUF !)

Remarque de Maxime :

16) a) La formule d'Euler dont il est question ici est celle reliant le sinus à l'exp. complexe :

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha,\theta)\sin(\theta\alpha) &= \varphi(\alpha,\theta)\,\frac{e^{i\alpha\theta}-e^{-i\alpha\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\Big(\varphi(\alpha,-\theta)\,e^{i\alpha\theta} - \varphi(\alpha,\theta)\,e^{-i\alpha\theta}\Big)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{te^{-i\theta}+1}\,dt - \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1}\,dt\right)\\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{t^2+2t\cos\theta+1}\,dt = \sin\theta\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{t^2+2t\cos\theta+1}\,dt
\end{aligned}$$

b) La fonction $u\mapsto u\sin\theta-\cos\theta$ est une fonction affine strictement croissante bijective de $]\cot\!an\,\theta,\,+\infty[$ dans $]0,\,+\infty[$.

Par ailleurs, un calcul direct montre que

$$(u\sin\theta-\cos\theta)^2 + 2(u\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta + 1 = (u^2+1)\sin^2\theta.$$

On obtient donc, en effectuant dans l'intégrale du a) le changement de variable $t = u\sin\theta - \cos\theta$:

$$\varphi(\alpha,\theta)\sin(\theta\alpha) = \sin\theta\int_{\mathrm{cotan}\,\theta}^{+\infty}\frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^\alpha}{(u^2+1)\sin^2\theta}\,\sin\theta\,du = \int_{\mathrm{cotan}\,\theta}^{+\infty}\frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^\alpha}{u^2+1}\,du$$

17) $\varphi(\alpha,\theta)$ étant indépendant de θ, notons le simplement $\varphi(\alpha)$.

Démontrer l'égalité demandée revient à démontrer que $\varphi(\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, ou encore que $\varphi(\alpha)\sin(\pi\alpha) = \pi$.

Lorsque θ tend vers π, le membre de gauche de l'égalité du 16.b) tend vers $\varphi(\alpha)\,\sin(\pi\alpha)$; il suffit donc de démontrer que le membre de droite de cette même égalité tend vers π.

Définissons une famille $(h_\theta)_{\theta\in]0,\pi[}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h_\theta(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < \operatorname{cotan}\theta \\ \dfrac{(u\sin\theta - \cos\theta)^\alpha}{u^2+1} \text{ si } u \geq \operatorname{cotan}\theta, \end{cases} \quad \text{de sorte que } \int_{\operatorname{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^\alpha}{u^2+1}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} h_\theta(u)\,du.$$

Lorsque θ tend vers π, la famille (h_θ) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2+1}$, avec de plus $0 \leq h_\theta(u) \leq \dfrac{(|u|+1)^\alpha}{u^2+1}$, qui est une fonction indépendante de θ et intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque $\alpha < 1$.

Par le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_\theta(u)\,du \underset{\theta\to\pi}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = \pi$, ce qu'il fallait démontrer (re-ouf, on n'a rien compris à l'idée mais ça marche !).

b) La formule des compléments appliqués à $\alpha = 1/2$ donne $\Gamma(1/2)^2 = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$.

Comme $\Gamma(1/2) > 0$ on conclut que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.