

Banque CCINP : Ex. 29,30.

Etude et calcul de fonctions définies par un intégrale à paramètre, en dérivant et E.D.

Exercice 1 (Oral CCINP 2022.. avec du calcul de D.E.S. à la fin!!).

- a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\arctan u| \leq |u|$.
- b) On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$
 - i) Domaine de définition de F ?
 - ii) Domaine de continuité de F ?
 - iii) Domaine de dérivabilité de F ?
 - iv) Déterminer F' .
 - v) En déduire F .

Exercice 2 (Un calcul commencé en cours...). On note $G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

- a) Culture bienvenue : connaissez vous la valeur de G ?
- b) On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.
 - i) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$, et dérivable sur $]0, +\infty[$.
 - ii) Montrer que F vérifie sur $]0, +\infty[$ une E.D. dont on exprimera les solutions en fonctions de G .
 - iii) En utilisant la continuité de F en 0, exprimer alors F en fonction de G .
 - iv) En considérant la limite de F en $+\infty$, montrer $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- c) **Bonus (d'autres idées...)** A l'aide d'une expression trouvée pour F grâce à l'E.D. obtenir un D.A. à deux termes significatifs de $F(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 3. Soit $x \geq 0$, on va calculer $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

- a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f' . On suppose connue l'intégrale G de l'exercice 2.
- b) Montrer que f est continue en 0 : pour la domination, on peut séparer l'intégrale en deux morceaux.
- c) Conclure sur la valeur explicite de f .

Une application plus inattendue de la dérivation sous le signe intégrale :

Exercice 4 (Théorème de factorisation dans l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r-1)}(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^r g(x).$$

Autrement dit f est *divisible* par $x \mapsto x^r$ dans l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication – Ecrire f comme une intégrale... Faire aussi une preuve plus élémentaire pour $r = 1$.

Comportement à l'infini d'intégrales à paramètre

Exercice 5 (Oral CCINP MP 2021). On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}} dt$.

- a) Montrer que f est définie.
- b) Montrer que f est continue.
- c) Montrer que f est décroissante.
- d) On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^x)} dt$.
Montrer que $g(x) = \frac{\ln 2}{x}$.
- e) Montrer que $0 \leq f(x) \leq g(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- f) Montrer que $g(x) - f(x) \leq \frac{\ln 2}{2x+1}$ pour tout $x > 0$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$

Exercice 6 (Transformée de Laplace de $t \mapsto 1/\sqrt{1+t}$, précision p.r. au théorème de la valeur initiale).

- a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} du$. (i) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .
(ii) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- b) Soit $L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}} dt$. Déterminer un équivalent de $L(x)$ en 0^+ et en $+\infty$