Banque CCINP : Ex. 19, 25,26, et aussi : ex 14 (révision S2).

Préludes et fugues de la convergence bien dominée

Exercice 1. Etudier les limites quand $n \to +\infty$ de :
a) $\int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$,
b) $\int_0^{n} (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} dx$

Exercice 2. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} dt$.
a) Trouver la limite ℓ de I_n.
b) Trouver un équivalent de $\ell - I_n$.

Exercice 3 (Cas où le candidat limite n'est pas intégrable...)**.** Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t + \sin(\frac{1}{n})} dt$.

Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geq 1$ et étudier la limite de (I_n) quand $n \to +\infty$.
On pourra chercher à minorer I_n...

Exercice 4. Soit $a > 0$ et $I_n = n \int_0^a \sin(t^n) dt$.
Etudier la suite (I_n) en distinguant les cas $a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.
Indication – On rappelle qu'un changement de variable permet de faire « rentrer » le n dans l'intégrale...

Exercice 5 (Une nouvelle amie : la fonction Γ, première rencontre)**.** Soit $x > 0$. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

a) Justifier que Γ est bien définie et que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$.
b) Montrer que $\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$
c) En déduire la formule, suivante, due à L. Euler :

$$\forall\, x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Equivalent de suites d'intégrales

Exercice 6 (Encore un équivalent par changement de variable $u = x^n$ mais cette fois le x est dans $[1, +\infty[$)**.** Soit $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$. Obtenir un équivalent simple de I_n, quand $n \to +\infty$ avec un coefficient qui est une intégrale, qu'on ne cherchera pas à calculer.

Situations d'intégration terme à terme

Exercice 7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln^p(x)}{1-x}$ est intégrable sur $]0,1[$.
b) Calculer la valeur de cette intégrale $\int_0^1 \frac{\ln^p(x)}{1-x} dx$ comme somme d'une série.

Exercice 8 (Le produit $\Gamma\zeta$)**.** On connaît déjà pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Démontrer que $\forall\, x > 1$, $\quad \Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du$.

Exercice 9 (Un exemple où le dév. en série permet d'avoir un équivalent)**.** Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$.
a) Pour $x > 0$, donner un développement de $f(x)$ comme somme d'une série de fonctions rationnelles.
b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$.

Exercice 10. On a montré au D.M. 6 que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right) \quad (1)$$

On va en déduire que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad (2)$$

a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$.
Justifier que la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Calculer, pour tout $x \in]-\pi, \pi[\smallsetminus\{0\}$,
$\dfrac{d}{dx}(\ln(\operatorname{sinc}(x)))$ puis étudier cette même dérivée pour $x = 0$.

c) En déduire la formule (2) attendue.