Banque CCINP : Ex. 25. 1), 28, 29.1 et 29.2),

Exercice 1. Intégrabilité de f sur I si :

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+e^x}$ et $I = \mathbb{R}_+^\star$,

b) $f(x) = \frac{\ln(1+x^p)}{x^q}, I = \mathbb{R}_+^\star, (p,q) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$,

c) $f(x) = [\ln(x)]^{-\ln(x)}, I =]1, +\infty[$.

Exercice 2. Existence et calcul de :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2})dt.$

b) pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 t^n(\ln(t))^p dt.$

c) $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^{3/2}}dx$,

d) $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\ln(t)}{(1+t^2)^\alpha}dt, \alpha > 0$, à l'aide du changement de variable $u = 1/t$, ,

e) $K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$,

f) $L = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x+x_k}\right)dx$ si $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ et $0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Exercice 3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt = +\infty$.

Exercice 4. a) Soit $x > 0$. Justifier que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ est bien définie.

b) Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\cos(x)}{x} + O(\frac{1}{x^2})$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 5. Existe-t-il un polynôme réel P à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$ tel que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3+t} - \sqrt{P(t)})dt,$$

converge ?

Exercice 6 (Méthode du DL ou de l'éclatement idem série à t.g. de signe variable)**.** a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

b) En déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos\left(t^2\right)dt$.

c) Montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t+\cos t}dt$

Exercice 7 (Intégrale pulsantes)**.** Le but de cet exercice est de déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2(x)}$.

a) Tracer le graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4\sin^2(x)}$ à l'aide de Python et justifier l'idée qui suit de se ramener à une étude de série.

b) Soit $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4\sin^2(x)}dx$.

Démontrer que $v_n \leq \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^4\sin^2(t)} \leq \lambda\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+Cn^4t^2} := u_n$ avec $\lambda > 0$ et $C > 0$ des constantes.

c) Soit $C > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+Cn^4t^2}$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

d) Conclure sur la nature de $\sum v_n$ et celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2(x)}$.

e) Est-ce que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ est intégrable, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 8 (Mines-Ponts 2023)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Montrer que $f.f'$ est intégrable

c) (Rajouté par moi) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 9. Déterminer un équivalent simple de $I(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\arcsin(t)}dt$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 10. Soit $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt$. On sait que $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Montrer que $1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

Révisions sur les calculs d'intégrales : fonctions rationnelles et autres..

Fonctions rationnelles

Exercice 11 (Les trois cas pour un dénominateur de degré 2)**.** Déterminer une primitive pour les trois fonctions suivantes : a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-5x+6}$. b) $g(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+4x+6}$ c) $h(x) = \dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$.

Exercice 12 (Un dénominateur plus compliqué)**.** Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.

Exercice 13. Soit $I_n = \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{(t^3+1)^n}$.

a) Calculer $I_1(x)$.
b) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 2$.

Fonctions rationelles et exp. ou en fonctions trigo.

Exercice 14. Primitive de $f :: x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(a)}$ où a fixé.

Exercice 15. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos(\alpha)\cos(x)}$ pour $\alpha \in]0, \pi[$ fixé.

Exercice 16. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(\cos(t)+\sqrt{3}\sin(t))^2}$.

Racines carrées

Exercice 17. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ en notant $F(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}dt$ et en posant $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ dans l'intégrale.

Intégrales non élémentaires

Exercice 18. Soit a et b deux réels strictement positifs. Calculer $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Indication – On pourra d'abord considérer $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ puis séparer l'intégrale en deux.

Exercice 19. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$.

a) Justifier que I est bien définie.
b) Méthode 1 de calcul de I.
   i) On note $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$. Montrer que $I = J$.
   ii) A partir de $I + J$, montrer par changement de variable que $I = -\pi/2 \ln(2)$.
c) Méthode 2 : on va généraliser la méthode des sommes de Riemann pour le calcul de cette intégrale sur l'intervalle $]0, \pi/2]$, la monotonie de f remplaçant l'hyp. de continuité connues sur les segments.
   On note $S_n = \dfrac{\pi}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(\sin(\frac{k\pi}{2n}))$.
   i) Encadrer $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$ à l'aide de S_n.
   On veut étudier la limite de S_n.
   ii) Montrer d'abord que si $\theta \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\theta + k\frac{\pi}{n}) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
   iii) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
   iv) En déduire enfin la limite de (S_n).
   v) Conclure sur la valeur de I.