**MP 2** **Samedi 02 Décembre 2023**

# Devoir surveillé 3 (4h)

**Les calculatrices sont interdites.**

## Problème 1 : suites d'itérées par une application linéaire

1) **Un premier exemple :** on considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2, \quad w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n). \end{cases}$$

a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$

b) Justifier l'existence d'une matrice diagonale $D$ et d'une matrice inversible $P$ telles que $D = P^{-1}MP$ et préciser $D$ et $P$.

c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer la valeur de leur limite.

**Notations :** Dans la suite de cette partie, on suppose que $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie ou de dimension finie $n \geq 2$.

On fixe un vecteur $a$ non nul de $E$ ainsi qu'une forme linéaire $u$ sur $E$. On considère l'application linéaire $h$ définie sur $E$ par

$$\forall x \in E, \quad h(x) = u(a)x - u(x)a$$

et on supposera $u(a) \neq 0$.

2) a) Démontrer que Ker $h$ est une droite vectorielle à préciser.

b) Démontrer que $\operatorname{Im} h$ est un hyperplan de $E$ à préciser.

3) a) L'endomorphisme $h$ est-il diagonalisable ?

b) Déterminer le polynôme minimal de $h$.

c) Démontrer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre $h^p$ et $h$.

4) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que l'espace vectoriel $E$ est muni d'une norme $\| \ \|$ et l'on suppose d'autre part que $|u(a)| < 1$. Montrer que

$$\forall\, x \in E, \ \|h^p(x)\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5) **Applications :**

a) Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles. On considère la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f_{p+1}(t) = \frac{2}{3}f_p(t) - \sin(3t)\int_0^\pi f_p(s)ds.$$

Démontrer que la suite $(f_p)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi]$. La convergence est-elle uniforme ?

b) En considérant $E = \mathbb{R}^3$, le vecteur $a = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ et la forme linéaire $h : (x, y, z) \mapsto x - y + z$, retrouver les limites des suites $(u_n), (v_n)$ et $(w_n)$ de la question 1.

## Problème 2 : propriétés du rayon spectral et suites $(A^k)$

**Définition :** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Le *rayon spectral de* $A$ noté $\rho(A)$ est défini par $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, où $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de $A$.

**Convention de notation :** Si on fixe une norme $\| \ \|$ sur $E := M_{n,1}(\mathbb{C})$ alors pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note aussi $\|A\|$ la norme matricielle subordonnée de $A$, définie par : $\|A\| = \sup_{X \in E, \|X\|=1} \|AX\|$.

1) Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\|X\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

   Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\|_\infty \leq \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$. Pour la suite, on admet *l'égalité* :

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \tag{1}$$

2) a) Montrer que pour toute norme matricielle subordonnée $\| \ \|$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\rho(A) \leq \|A\|. \tag{2}$$

   b) Montrer que l'inégalité du a) peut être stricte.

3) On considère la norme $\| \ \|_\infty$ sur $E = M_{n,1}(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
   a) Montrer que l'application $E \to \mathbb{R}^+$, $X \mapsto \|X\|_P := \|P^{-1}X\|_\infty$ est une norme sur $E$.
   b) Montrer que la norme matricielle subordonnée à $\| \ \|_P$ est reliée à la norme matricielle surbordonnée à $\| \ \|_\infty$ par la relation :

$$\forall\ A \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_P = \|P^{-1}AP\|_\infty \tag{3}$$

4) Dans cette question, on fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $\| \ \|$ telle que :

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon \tag{4}$$

   a) Soit $\delta > 0$, et $D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$, calculer $D_\delta^{-1} A D_\delta$.
   b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une matrice $P_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T_\varepsilon = P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon$ soit triangulaire supérieure avec, en plus, en notant $T_\varepsilon = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, la propriété :

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}| < \varepsilon.$$

   c) En déduire (4) en considérant $\|A\|_{P_\varepsilon}$.

5) **Quatre premières conditions équivalentes :** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. A l'aide de ce qui précède montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) $A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
   (ii) pour tout $X_0 \in E$, la suite $(X_k)$ définie par $\forall\, k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k$ converge vers zéro,
   (iii) $\rho(A) < 1$,
   (iv) il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\| < 1$.

6) **Deux autres conditions équivalentes :** On considère les conditions :

   (v) La matrice $I_n - A$ est inversible, et la série $\sum A^k$ converge avec $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$.

   (vi) La série $\sum A^k$ converge.

a) Montrer : (vi) $\Rightarrow$ (i)
b) Montrer : (iii) $\Rightarrow$ (v).

Comme l'implication (v) $\Rightarrow$ (vi) est évidente, on a montré l'équivalence de toutes ces propriétés. Toutefois, on pourrait souhaiter un chemin plus court pour prouver que (vi)$\Rightarrow$ (v) :

c) Montrer que (vi)$\Rightarrow$ (v) en partant de l'égalité $(I_n - A)(\sum_{k=0}^{p} A^k) = I_n - A^{p+1}$ et en justifiant que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$.

7) **Application à une méthode itérative de résolution des systèmes linéaires**
Étant donné un système linéaire $AX = Y$ de $n$ équations à $n$ inconnues, écrit matriciellement, où $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $Y \in E$ sont données et on cherche $X \in E$, on veut construire une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ qui va converger vers la solution $X$ de ce système, le calcul de chaque $X_k$ étant plus simple que la résolution directe du système.
Pour ce faire, on va choisir une écriture de la matrice $A$ sous la forme $A = M - N$, où $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ et $M$ est facilement inversible (voir un exemple ci-dessous) et la résolution de $AX = Y$ est ramenée au problème de point fixe qui consiste à trouver $X \in E$ solution de l'équation :

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}Y \tag{5}$$

c'est-à-dire point fixe de l'application $f\ : E \to E,\ X \mapsto M^{-1}NX + M^{-1}Y$.
On fixe donc un $X_0 \in E$ arbitraire et on considère la suite $(X_k) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = f(X_k).$$

a) Justifier que *si* la suite $(X_k)$ converge dans $E$ *alors* elle converge vers l'unique $X$ vérifiant (5) et que ce $X$ est l'unique solution du système $AX = Y$.
b) Montrer que la suite $(X_k)$ converge dans $E$ si, et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.
c) En pratique le calcul du rayon spectral n'est pas aisé. Montrer que s'il existe une norme subordonnée telle que $\|M^{-1}N\| < 1$ alors la suite $(X_k)$ converge.
d) Quel test d'arrêt proposeriez-vous si vous vouliez implémenter le calcul des $(X_k)$ ?
e) **L'exemple de la méthode de Jacobi :** on suppose ici que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$ et on prend $M = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$. On applique ici cette méthode au cas où, en outre, $A$ est à diagonale strictement dominante c'est-à-dire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que dans ce cas :
(i) la matrice $A$ est bien inversible,
(ii) la suite associée $(X_k)$ à cette méthode, avec ce choix de $M = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$, converge.

8) **Une formule donnant le rayon spectral :**

a) Soit $\|\ \|$ une norme matricielle subordonnée, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$.
On pose $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$.
Montrer qu'il existe un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \geq k_\varepsilon,\ \|A_\varepsilon^k\| < 1$.
b) En déduire que : $\forall\, k \geq k_\varepsilon,\ \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

On vient de montrer que, pour une norme matricielle subordonnée, on a l'égalité :

$$\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k}. \tag{6}$$

c) Montrer que ce résultat reste vrai en remplaçant $\|\ \|$ par une norme *quelconque* sur $M_n(\mathbb{C})$ (qui n'est pas nécessairement une norme d'algèbre) et qu'on notera $\|\ \|_1$ par exemple.

**Remarque :** cette formule permet d'évaluer des rayons spectraux de manière utile par exemple pour la méthode du 7).