Devoir surveillé 3 : solutions

Problème 1 d'après E3A PC 2012

1) **Un premier exemple :**

a) La définition des trois suites donne que $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

b) $\det(M - \lambda I_3) = \det\left(\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -3-4\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -4\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -1-4\lambda \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -3-4\lambda & -4\lambda-2 & 4\lambda+2 \\ -2 & -4\lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & -4\lambda-2 \end{vmatrix}$ par les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.
Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3$ on obtient :

$$\det(M - \lambda I_3) = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4\lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & -4\lambda-2 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{16}(4\lambda+2)^2.$$

Les valeurs propres de M sont 0 (simple) et $-\frac{1}{2}$, de multiplicité algébrique 2.

- $MX = -\frac{1}{2}X \iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \iff x - y + z = 0$. Le sous-espace propre associé à $-\frac{1}{2}$ est de dimension 2 et a pour base (u_1, u_2) avec $\begin{cases} u_1 = (1,1,0), \\ u_2 = (1,0,-1). \end{cases}$
- $MX = 0 \iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \iff \begin{cases} z = -x, \\ y = 2x. \end{cases}$ Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension 1 et a pour base $u_3 = (1,2,-1)$.

Conclusion : la matrice M est donc diagonalisable, semblable à $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

avec une matrice de passage égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Par le a) et par récurrence immédiate, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = M^n X_0 \quad (*)$$

Or par b) $M^n = PD^nP^{-1}$.
Comme $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (convergence dans $M_3(\mathbb{R})$, coordonnées par coordonnées), on en déduit par continuité du produit matriciel, que $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Avec la relation $(*)$, et encore la continuité de la multiplication, on conclut que :

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$ ce qui montre que les trois suites $\boxed{(u_n),(v_n),(w_n) \text{ convergent vers } 0}$.

2) a) Soit $x \in E$. Si $h(x) = 0$ alors $x = \frac{u(x)}{u(a)}a \in \mathrm{Vect}(a)$ (on a supposé $u(a) \neq 0$). Donc $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Vect}(a)$.
D'autre part on calcule immédiatement que $h(a) = 0$ donc $\mathrm{Vect}(a) \subset \mathrm{Ker}(h)$.
On a donc bien $\boxed{\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vect}(a)}$.

b) **N.B. rappel de cours :** *Dans un espace vectoriel E qui n'est pas supposé de dim. finie, un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe une droite vectorielle D de E vérifiant $H \oplus D = E$ ce qui équivaut aussi à la propriété qu'il existe une forme linéaire non nulle φ de E tel que $H = \ker(\varphi)$.*
Ici on va montrer que :

$\boxed{\mathrm{Im}\, h = \ker u \text{ et comme } u \text{ est une forme linéaire non nulle, on saura que } \mathrm{Im}\, h \text{ est un hyperplan. } (*)}$

Pour montrer $(*)$, d'une part on calcule :

$$\forall\, x \in E,\ u(h(x)) = u(a)u(x) - u(x)u(a) = 0.$$

Donc $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Réciproquement, si $x \in E$ vérifie $u(x) = 0$ alors $h(x) = u(a)x$ d'où $x = \frac{1}{u(a)}h(x) \in \mathrm{Im}(h)$.
On a donc bien montré que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Ker}(u)$ et justifié $(*)$.

3) a) On considère l'équation aux valeurs propres :

$$h(x) = \lambda x \Longleftrightarrow (u(a) - \lambda)x = u(x)a,$$

en cherchant les $\lambda \in K$ tels que l'équation aient des solutions $x \neq 0$.

- pour $\lambda = u(a)$ les x solutions sont ceux qui vérifient $u(x) = 0$. Donc $\lambda = u(a)$ est donc valeur propre de sous-espace propre associé $E_{u(a)}(h) = \mathrm{Ker}(u)$.
- pour $\lambda \neq u(a)$ on obtient que x est colinéaire à a ; comme $h(a) = 0, 0$ est valeur propre de sous-espace propre associé égal à $\mathrm{Vect}(a)$.

Comme $E_{u(a)}(h) = \ker u$ est un hyperplan et $E_0(h) = \mathrm{Vect}(a)$ est une droite vectorielle, et que $0 \neq u(a)$, on est sûr que $E = E_{u(a)}(h) \oplus E_0(h)$ donc h est diagonalisable.
N.B. En dim. finie c'est la seule définition possible de la diagonalisabilité : l'espace est somme directe de s.e.v. propres.

b) Comme h est diagonalisable des valeurs propres $u(a)$ et 0, on sait que $\boxed{\mu_h = X(X - u(a))}$.
Cela s'applique même si E est de dimension infinie car sur chaque des deux s.e.v. propres h est une homothétie et donc annulée par X ou $(X - u(a))$ et donc par le produit.

c) Comme $X^2 - u(a)X$ annule h, on a donc $h^2 = u(a)h$.
Montrons par récurrence sur $p \geqslant 1$ la propriété

$$P(p) : h^p = (u(a))^{p-1}h$$

Vue la formulation de la question, rédiger la récurrence même si c'est immédiat.

- $P(1)$ est vérifiée car $(u(a))^0 = 1$.
- Supposons $P(p)$ vraie pour un $p \geq 1$. Pour tout $x \in E$,

$$h^{p+1}(x) = h\left(h^p(x)\right) = (u(a))^{p-1}h^2(x).$$

Or $h^2 = u(a)h$ vu μ_h. On en déduit $h^{p+1}(x) = (u(a))^p h(x)$. Donc $P(p+1)$ est vraie.

La récurrence est établie.

4) Soit $x \in E$, d'après le 3) c), $\|h^p(x)\| = |u(a)|^{p-1}\|h(x)\|$ et puisque $|u(a)| < 1$, on sait que $|u(a)|^{p-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut bien que : $\|h^p(x)\| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5) **Applications :**

a) Nous allons appliquer le résultat du 4. en prenant :

- $E = \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ muni de la norme définie par $\forall\, f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)|$
- pour u la forme linéaire sur E définie par $\forall\, f \in E,\ u(f) = \int_0^\pi f(t)dt,$
- pour $a \in E$ la fonction définie par $\forall\, t \in [0,\pi],\ a(t) = \sin(3t).$

On calcule $u(a) = \int_0^\pi \sin(3t)dt = -\frac{1}{3}(\cos(3\pi) - \cos(0)) = \frac{2}{3}$. En posant

$$\forall\, f \in E,\ h(f) = u(a)f - u(f)a$$

on obtient bien que la relation définissant f_{p+1} dans l'énoncé s'écrit :

$$f_{p+1} = h\left(f_p\right)$$

Comme $|u(a)| = 2/3 < 1$, on sait par le 4) que $\|f_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la suite (f_p) converge **uniformément** vers la fonction nulle, et en particulier simplement.

b) Suivant l'énoncé, en prenant $E = \mathbb{R}^3$, pour u la forme linéaire définie par $u(x,y,z) = (x-y+z)$ et $a = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. On obtient $u(a) = -\frac{1}{2}$ donc on a donc bien $|u(a)| < 1$. L'application h est définie par

$$\forall\,(x,y,z) \in E,\,, h(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x,y,z) - (x-y+z)a = \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z\right).$$

On a donc $(u_{p+1}, v_{p+1}, w_{p+1}) = h\left(u_p, v_p, w_p\right)$ et par suite $(u_p, v_p, w_p) = h^p\left(u_0, v_0, w_0\right)$ a sa norme qui tend vers 0 quand p tend vers l'infini. On retrouve bien que les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) convergent vers 0 .

Problème 2 d'après un mélange de problèmes divers (Centrale/Mines)

1) Par déf. du produit matriciel : $\|AX\|_\infty = \max\{|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j|,\ i = 1,\ldots,n\}$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$:

$$|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \leq \max_{j\in[\![1,n]\!]}(|x_j|)\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad (*)$$

En notant $K = \max\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, i = 1,\ldots,n\}$ et en passant au max. dans $(*)$,on a montré que :

$$\boxed{\|A\|_\infty \leq K.}$$

Pour l'égalité non demandée : Soit i_0 tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ réalise le max. K.

La construction d'un X de norme 1 tel que $\|AX\|_\infty = K$ est un peu plus délicate : On peut supposer $A \neq 0$ sinon tout est trivial. On prend pour tout $j \in [[1,n]]$,

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

D'abord il est clair que $\|x\|_\infty = 1$ car il n'est pas possible que toutes les entrées de x soient nulles car sinon A serait nulle.
En notant $Y = AX$, on a

$$|y_{i_0}| = |\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}x_j| = \left|\sum_{j\ ,a_{i_0,j}\neq 0} \frac{a_{i_0,j}^2}{|a_{i_0,j}|}\right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = K$$

2) a) Soit λ une valeur propre de A qui vérifie $\rho(A) = |\lambda|$ et X un vecteur propre associé dans E, de norme 1 . On a alors :

$$\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \leq \|A\|$$

d'où $\rho(A) \leq \|A\|$.

b) En prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (ou n'importe quelle matrice nilpotente non nulle), on a $\rho(A) = 0$ et $\|A\| > 0$.

3) On vérifie directement les trois axiomes des normes :
• Séparation ; si $\|P^{-1}X\|_\infty = 0$ alors $P^{-1}X = 0$ car $\| \|_\infty$ est une norme et en multipliant à gauche par P, on a $X = 0$.
• Homogénéité : $\|P^{-1}(\lambda X)\|_\infty = \|\lambda P^{-1}X\|_\infty = |\lambda|\|P^{-1}X\|_\infty$.
• Inégalité triangulaire : si X, Y dans E, $\|P^{-1}(X+Y)\|_\infty = \|P^{-1}X + P^{-1}Y\|_\infty \le \|P^{-1}X\|_\infty + \|P^{-1}Y\|_\infty$.
Remarque 1 : en fait tout vient de la linéarité de $X \mapsto P^{-1}X$ et de sa bijectivité, qui permettent ensuite d'appliquer les propriétés de la norme infinie.
Remarque 2 (et méthode 2) P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ qu'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, en notant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

les coordonnées du vecteur x dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$, on a $X' = P^{-1}X$ donc

$$\|X\|_P \overset{\text{déf.}}{=} \left\|P^{-1}X\right\|_\infty = \|X\|_\infty .$$

Autrement dit $\| \|_P$ **est la norme infinie associée à la base $\mathcal{B}'$** ce qui suffit pour justifier que c'est une norme.
b) Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\|A\|_P \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{X \in E \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_P}{\|X\|_P} \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{X \in E \setminus \{0\}} \frac{\left\|P^{-1}AX\right\|_\infty}{\|P^{-1}X\|_\infty}$$

soit, en posant $X = PX$ et par bijectivité de la correspondance entre X et X' :

$$\|A\|_P = \sup_{X \in E \setminus \{0\}} \frac{\left\|P^{-1}APX\right\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \left\|P^{-1}AP\right\|_\infty$$

4) a) **Bien maîtriser la multiplication par une matrice diagonale :** La multiplication à droite par D_δ a pour effet de multiplier la colonne numéro j par δ^{j-1} et la multiplication à gauche par D_δ^{-1} a pour effet de diviser la ligne numéro i par δ^{i-1}. Il en résulte que :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ D_\delta^{-1}AD_\delta(i,j) = \delta^{j-1}\delta^{1-i}a_{ij} = \delta^{j-i}a_{ij}.$$

b) Dans $M_n(\mathbb{C})$, on sait que toutes les matrices sont trigonalisables : on peut trouver une matrice inversible P à coefficients complexes telle que la matrice $T' := P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure et en notant $T' = (t'_{i,j})$, le calcul du a) donne alors :

$$T_\delta := D_\delta^{-1}T'D_\delta = \begin{pmatrix} t'_{11} & \delta t'_{12} & \dots & \delta^{n-1}t'_{1n} \\ 0 & t'_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta t'_{n-1,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & t'_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice T_δ est semblable à la matrice A et, en notant $T_\delta = (t_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, on a $\lim_{\delta\to 0} t_{ij} = 0$ pour tout $1 \le i < j \le n$, et on peut donc choisir $\delta > 0$ tel que les sommes finies de l'énoncé vérifient :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}| < \epsilon.$$

c) On associe alors à la matrice P_ϵ la norme matricielle :

$$M \mapsto \|M\|_{P_\varepsilon} = \left\|P_\epsilon^{-1}MP_\epsilon\right\|_\infty$$

vue à la question 3) b). Alors

$$\begin{aligned}\|A\|_{P_\varepsilon} &= \left\|P_\epsilon^{-1}AP_\epsilon\right\|_\infty = \|T_\epsilon\|_\infty \\ &= \max\left\{|t_{nn}|,\quad |t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}|\,;1 \le i \le n-1\right\} \quad \text{par 1)} \\ &\le \epsilon + \max_{1\le i\le n} |t_{ii}| \quad \text{par 4) b)}\end{aligned}$$

Comme T_ε est triangulaire, les t_{ii} sont les valeurs propres de T_ε et comme T_ε et A sont semblables, les t_{ii} sont aussi les valeurs propres de A. On en déduit bien que :

$$\|A\|_P \le \rho(A) + \epsilon.$$

5) i) $\Rightarrow$ (ii) Par déf. de la suite (X_k) et de la norme d'opérateur :

$$\|X_k\| = \left\|A^k X_0\right\| \le \left\|A^k\right\| \|X_0\|$$

Donc (i) entraîne bien que $\|X_k\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) *Par contraposée :* supposons qu'il existe une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| \ge 1$. Si X_0 est un vecteur propre non nul associé à λ, en écrivant que $X_k = A^k X_0 = \lambda^k X_0$, on voit que $\|X_k\| = |\lambda|^k \|X_0\|$ ne tend pas vers zéro, donc la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 .

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Comme $\rho(A) < 1$ on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par la question 4), il existe une norme matricielle induite telle que $\|A\| < \rho(A) + \epsilon$ et donc $\|A\| < 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) On sait que les normes matricielles subordonnées sont *multiplicatives*. Donc,en prenant une norme matricielle induite qui vérifie $\|A\| < 1$ et en écrivant que $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$, on déduit que $\lim_{k\to+\infty}\left(A^k\right) = 0$.

On a donc montré que les assertions (i) à (iv) sont équivalentes.

6) a) Fait général : si une série converge, alors son terme général tend vers zéro. Refaisons néanmoins l'argument : on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ on sait que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $A^k = S_k - S_{k-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$.
b) Si $\rho(A) < 1$ alors 1 n'est pas valeur propre de A et $I_n - A$ est inversible. En notant, pour tout entier $p, S_p = \sum_{k=0}^{p} A^k$, on a :

$$(I_n - A)\,S_p = I_n - A^{p+1}$$

et comme $(I_n - A)$ est inversible :

$$S_p = (I_n - A)^{-1}(I_n - A^{p+1}).$$

Comme $\lim_{p\to+\infty}\left(I_n - A^{p+1}\right) = I_n$, en utilisant la continuité du produit matriciel, on déduit alors que :

$$\lim_{p\to+\infty} S_p = \lim_{p\to+\infty} (I_n - A)^{-1}\left(I_n - A^{p+1}\right) = (I_n - A)^{-1}$$

c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}$.

7) a) L'application $f : E \to E$ est *continue* par continuité du produit matriciel et de la somme. Donc si $X_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} X$ on $f(X_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(X)$. Mais comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = f(X_k)$ on conclut que $X = f(X)$ par unicité de la limite.
D'autre part, $AX = Y \Leftrightarrow (M - N)X = Y \Leftrightarrow MX = NX + Y \Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}Y \Leftrightarrow f(X) = X$.
Donc f admet un unique point fixe, qui est l'unique solution du système $AX = Y$.

b) On pose $B = M^{-1}N$ et on suppose que $\rho(B) < 1$. En écrivant que l'équation $AX = Y$ équivaut à $X = BX + M^{-1}Y$, on déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{(k+1)} - X = B\left(X_{(k)} - X\right) = B^{k+1}\left(X_{(0)} - X\right) \quad (*)$$

Avec $\rho(B) < 1$ on déduit par 5) que $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$ et donc que la suite $\left(X(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X, quelle que soit la valeur initiale $X_{(0)}$.

Réciproquement, si la suite associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente, alors par $(*)$, pour tout vecteur $Y_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ la suite $\left(Y_{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $Y_{(k+1)} = BY_{(k)}$ pour tout entier k est convergente vers le vecteur nul, ce qui équivaut à $\rho(B) < 1$ (par 5).

c) Par 2) a), s'il existe une norme subordonnée telle que $\|B\| < 1$ alors $\rho(B) < 1$ et le b) sens $\Leftarrow$ s'applique.

d) Plusieurs choix sont possibles, sans qu'ils ne donnent un vrai contrôle de l'érreur d'approximation ; dans l'idéal on voudrait être sûr du rang k tel que $\|X_k - X\|_\infty < \varepsilon \quad (\dagger)$, mais bien sûr on ne connaît pas X.

- Il est classique d'arrêter la boucle pour les k tels que $\|X_{k+1} - X_k\|_\infty < \varepsilon$ mais bien sûr cela n'assure pas $(\dagger)$.
- Une autre possibilité est de tester $\|AX_k - Y\| < \varepsilon$.

e) (i) Exercice d'une planche : Soit donc *par l'absurde*, $X \in \ker A \smallsetminus \{0\}$. L'égalité $AX = 0$ s'écrit comme un système :

$$\begin{cases} L_1 \\ \vdots \quad \text{où } L_i : a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0. \\ L_n \end{cases}$$

Idée 1 : Si on prend les modules dans les égalités L_i on n'obtiendra rien d'intéressant car l'I.T. nous donnera qu'une somme de module est positive, pas surprenant ! Donc pour se rapprocher de l'hypothèse de l'énoncé, on isole le terme d'indice i. Autrement dit :

$L_i \Leftrightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j| \quad (*)$.

Idée 2 : cela prend bien le chemin d'une contradiction avec l'inégalité de l'énoncé, mais il faut encore se débarrasser des x_i, x_j. Il faudrait pour cela dans le membre de droite majorer tous les $|x_j|$ de façon à factoriser le terme $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. D'où l'idée :

On choisit une ligne L_i telle que $|x_i| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Alors $(*) \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leq \left(\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\right)|x_i|$.

Comme par hyp. $X \neq 0$, $|x_i| \neq 0$ et donc en divisant par $|x_i|$, on obtient :

$a_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$,

ce qui est la *contradiction.* □

(ii) Comme donné par l'énoncé, on écrit $A = M - N$ avec $M =: D = \operatorname{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$ et donc $N = D - A$.

D'après la question c), il suffit de montrer que $\|M^{-1}N)\|_\infty < 1$ où $\| \ \|_\infty$ désigne ici la norme subordonnée à la norme infinie.

Or $M^{-1}N = D^{-1}(D-A) = I-D^{-1}A$. Or $(D^{-1}A)(i,j) = (\dfrac{a_{i,j}}{a_{i,i}})$ donc $(M^{-1}N)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -\dfrac{a_{i,j}}{a_{i,i}} & \text{sinon.} \end{cases}$

Et d'après la question 1), $\|M^{-1}N)\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |M^{-1}N(i,j)|$ donc ici :

$$\|M^{-1}N\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j\neq i} |\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}|$$

Et par l'hyp. que A est à diagonale strictement dominante, on obtient bien que :

$$\|M^{-1}N\|_\infty < 1.$$

Joli non ?

8) a) On remarque que pour tout matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\rho(\lambda A) = |\lambda|\rho(A)$ puisque $\mathrm{Sp}(\lambda A) = \{\lambda\mu,\ \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

En effet un vecteur X est propre pour A pour la valeur propre μ si et seulement si, il est propre pour λA pour la valeur propre $\lambda\mu$.

Donc ici on sait que : $\rho\left(A_\epsilon\right) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\epsilon} < 1$.

D'après la question 5), on sait alors que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(A_\epsilon^k\right) = 0$.

Par la définition de la limite, on en déduit bien : $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq k_\epsilon, \quad \left\|A_\epsilon^k\right\| < 1$.

b) Par déf. de $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$, on sait que $A_\varepsilon^k = \dfrac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}$ donc :

$$\|A_\varepsilon^k\| = \frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}.$$

La conclusion du a) donne alors :

$$\forall k \geq k_\epsilon, \quad \left\|A^k\right\| < (\rho(A)+\epsilon)^k$$

En prenant la puissance $1/k$, on obtient bien l'inégalité de l'énoncé :

$$\forall k \geq k_\epsilon, \quad \left\|A^k\right\|^{1/k} < (\rho(A)+\epsilon) \quad (1)$$

D'autre part, pour toute matrice A et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\rho(A)^k \leq \rho(A^k) \quad (2)$$

En effet, si on prend $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$ et X vecteur propre associé, on a $A^k X = \lambda^k X$ donc $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(A^k)$ et $\rho(A)^k \leq \rho(A^k)$ d'où (2).

Avec (2), en prenant la puissance $1/k$, on a $\rho(A) \leq \rho(A^k)^{1/k}$ et on sait que $\rho(A^k) \leq \|A^k\|$ pour toute norme subordonnée par 2) a).

Donc

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \quad (3)$$

Avec (1) et (3), on a prouvé les inégalités demandées.

c) Pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\alpha\|A\|_1 \leq \|A\| \leq \beta\|A\|_1$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie). On a alors :

$$\forall k > 0, \quad \alpha^{\frac{1}{k}} \left\|A^k\right\|_1^{\frac{1}{k}} \leq \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \beta^{\frac{1}{k}} \left\|A^k\right\|_1^{\frac{1}{k}}$$

avec $\lim_{k\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \beta^{\frac{1}{k}} = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|_1^{\frac{1}{k}}\right) = \rho(A)$. Donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right) = \rho(A)$$