D.M. 8 : séries entières et intégrales à paramètres

Pour le lundi 8 Janvier 2024

Problème 1 : un produit infini en variable complexe et son D.S.E. :

Dans tout le problème, q est un nombre complexe tel que $|q| < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ on pose $f_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 - q^k z)$.

Les questions 2. et 3. sont indépendantes des questions 4. et 5.

1) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $\big(f_n(z)\big)$ est bornée.
   Indication – Comme on travaille en module, on pourra prendre le ln... ou bien sans ln avec $(1 + x) \leq e^x$...

   b) Montrer que pour chaque $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum(f_n(z) - f_{n-1}(z))$ converge. En déduire que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$. On note f sa limite.

   c) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (1 - qz)\, f(qz)$.

2) Dans cette question, **on suppose** que f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On pose : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide du 1.c), exprimer a_n en fonction de a_{n-1}.

   b) Montrer : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{(-1)^n\, q^{n(n+1)/2}}{\prod_{k=1}^{n}(1 - q^k)}$.

3) **On définit** maintenant la suite (a_n) par les formules du 2.b).

   a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

   Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   b) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = (1 - qz)\, g(qz)$.

   c) En déduire que $g = f$.

4) Dans cette question, on suppose $q \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{|q|}$.

   a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\big|f_n(z)\big| \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 - |q|^k |z|\big)$.

   b) En déduire que $f(z) \neq 0$.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Bonus sur les produits infinis dans $\mathbb{C}$: après cet exemple montrer de manière générale **le résultat utile suivant :**

> Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum z_n$ converge absolument alors la suite (P_n) où $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + z_k)$ converge dans $\mathbb{C}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq -1$ alors (P_n) converge vers une limite *non nulle*.

Problème 2 : une transformation intégrale (en lien avec Laplace à la fin)

Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t + x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $f \in E$, on note Tf la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $Tf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t + x}\, dt$.

Partie I : Étude de E

6) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$ contenant $\mathscr{L}_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$.

7) Pour tout nombre réel α, on note p_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $p_\alpha(t) = t^{\alpha-1}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles p_α appartient à E.

b) Montrer que dans ce cas, p_α est un vecteur propre de l'opérateur T ; on exprimera la valeur propre associée sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer pour le moment.

Partie II : Quelques propriétés de Tf

Soit $f \in E$.

8) Montrer que Tf est continue.

9) *Comportement asymptotique de Tf en $+\infty$*

a) Déterminer la limite de Tf en $+\infty$.

b) On suppose ici que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite de $xTf(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) On suppose ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que Tf possède un développement asymptotique . à la précision $\underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x^n})$ et donner ce développement.

On commencera par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{t+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{t^k}{x^{k+1}} + (-1)^n \left(\frac{t}{x}\right)^n \frac{1}{t+x}.$$

10) a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout réel h tel que $|h| < a$:

$$Tf(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+a)^{p+1}}\,dt\right) h^p.$$

b) Que signifie ce résultat pour Tf ? Que peut-on en déduire pour la dérivabilité de la fonction Tf ?

Partie III : Lien avec la transformée de Laplace

Soit F l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $f \in F$, on note Lf la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,dt$.

11) Montrer que E est inclus dans F.

12) Soit $f \in F$.

a) Montrer que Lf est continue et déterminer sa limite en $+\infty$.

b) Ici seulement, on prend $f(t) = \dfrac{1}{t+1}\cdot$ Montrer que f appartient à E et déterminer la limite de Lf en 0.

c) Donner une condition suffisante très simple portant sur f pour que Lf possède une limite finie en 0 et préciser alors cette limite.

13) Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x) = \displaystyle\int_{1/n}^{n} e^{-xt}f(t)\,dt$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b,x) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, avec $a < b$. Avec le N.B. qui suit montrer :

$$\int_a^b e^{-xu}g_n(u)\,du = e^{-xa}\int_{1/n}^{n} e^{-at}\frac{f(t)}{t+x}\,dt - e^{-xb}\int_{1/n}^{n} e^{-bt}\frac{f(t)}{t+x}\,dt.$$

N.B. : on admettra que l'on peut permuter les intégrales sur les segments $[a,b]$ et $[1/n,\, n]$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_a^b e^{-xu}Lf(u)\,du = e^{-xa}\int_0^{+\infty} e^{-at}\frac{f(t)}{t+x}\,dt - e^{-xb}\int_0^{+\infty} e^{-bt}\frac{f(t)}{t+x}\,dt.$

c) En déduire que Lf appartient à F.

On commencera par remarquer que $|f|$ appartient aussi à E et que l'égalité du b) est donc aussi applicable à $|f|$.

d) Montrer finalement que $L(Lf) = Tf$.

14) **Application à la formule des compléments**

Soit $\alpha \in]0,1[$. En considérant la fonction p_α définie au début du problème démontrer :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\, du.$$

La vraie formule des compléments est :

$$\forall\, \alpha \in]0,1[,\ \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (\dagger)$$

La suite du problème est donc consacrée à montrer qu'en effet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\, du = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (\ddagger)$

La preuve « standard » de cette égalité ($\ddagger$) utilise l'intégration dans le plan complexe, que vous verrez en première année d'école d'ingénierie.

Une autre preuve pas très difficile de la formule des compléments ($\dagger$), sans passer par cette intégrale, utilise l'écriture de Γ comme produit infini vue en exercice 5 pl. I2 et le développement du sinus comme produit infini (développement Eulerien du sinus Ex. 10 pl. I2). Là l'idée est assez claire et la preuve de ($\dagger$) est assez rapide.

La partie IV suivante propose donc une « troisième preuve » pas très illuminante mais bon « ça marche »...

Partie IV : Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\, dt$

On se propose de démontrer un peu plus généralement que pour $\alpha \in]0,1[$ et $\theta \in]-\pi,\pi[$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\, e^{-i\theta\alpha}$$

15) a) Pour $\alpha \in]0,1[$ et $\theta \in]-\pi,\pi[$, étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1}$.

Pour $\alpha \in]0,1[$ et $\theta \in]-\pi,\pi[$ on pose $\varphi(\alpha,\theta) = e^{i\theta\alpha} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{te^{i\theta}+1}\, dt.$

b) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, la fonction $\theta \mapsto \varphi(\alpha,\theta)$ est constante sur $]-\pi,\pi[$.

16) Soient $\alpha \in]0,1[$ et $\theta \in]0,\pi[$.

a) En utilisant l'égalité $\varphi(\alpha,-\theta) = \varphi(\alpha,\theta)$ et la formule d'Euler, montrer :

$$\varphi(\alpha,\theta)\sin(\theta\alpha) = \sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+2t\cos\theta+t^2}\, dt.$$

b) À l'aide d'un changement de variable, démontrer que :

$$\varphi(\alpha,\theta)\sin(\theta\alpha) = \int_{\cotan\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin\theta-\cos\theta)^\alpha}{u^2+1}\, du.$$

17) a) Démontrer l'égalité annoncée au début du **IV**.

b) Retrouver la valeur de $\Gamma(1/2)$.