D.M. 7 : séries de fonctions et intégration terme à terme

Pour le lundi 18 décembre 2023

Les deux problèmes sont indépendants, et il n'est pas déraisonnable de commencer par le premier.

Problème 1

Dans tout le problème, α est un réel strictement positif. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   b) Quelle est la limite de S en $+\infty$?

3) a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Dans ce cas, quelle est la limite de S en 0 ?

4) Montrer : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}$.

Dans toute la suite, on suppose $0 < \alpha < 1$.

5) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+tx^2)} \leq S(x) \leq x\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+tx^2)}$.

6) On pose $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{1-2\alpha}}{1+u^2}\, du$.
   a) Justifier l'existence de K.
   b) Montrer : $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2K\, x^{2\alpha-1}$.
   c) Déterminer la limite de S en 0.
   Pour $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, la convergence de $\sum u_n$ est-elle uniforme sur $]0, a]$?

Problème 2

Pour tout le problème, on se donne $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

On rappelle que $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\, dt$.

7) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(t) = t^{\alpha-1}e^{inx}e^{-nt}$.
   a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme f.
   b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leq \frac{t^{\alpha-1}e^{-nt}}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$.

8) A l'aide de 7), justifier soigneusement les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^\alpha} \overset{(8.1)}{=} \frac{e^{ix}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}}dt \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \overset{(8.2)}{=} \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}dt.$$

9) En déduire que pour $x \in]0, 2\pi[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$. (tiens le DM 6 revient...)

10) a) On suppose ici que $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Montrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \cos^n x$$

où $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}^{n+1} t}dt$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\text{ch}^{n+1}\, t}$.

Calculer explicitement $S(t)$ pour tout $t > 0$ et pour quelles valeurs de α la fonction S est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

c) Pour quelles valeurs de α la série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

d) Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n I_n$.

11) Soit $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $g(u) \underset{u\to 0}{\sim} a\, u^{l-1}$, avec $(a, l) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$.

On se propose de démontrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-nu}\, du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}$

a) Montrer que cela revient à prouver que : $n^\lambda \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(g(u) - a\, u^{\lambda-1}\right) e^{-nu}\, du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On revient pour cela à la définition de la limite ; soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Justifier l'existence d'un réel strictement positif δ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \int_0^\delta \left(g(u) - a\, u^{\lambda-1}\right) e^{-nu} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\, n^\lambda}.$$

On fixe un tel δ pour la suite.

c) Montrer qu'il existe une constante C, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale indépendante de n, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \int_\delta^{+\infty} \left(g(u) - a\, u^{\lambda-1}\right) e^{-nu}\, du \right| \leq C\, e^{-(n-1)\delta}$$

d) Conclure.

12) a) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\varphi(t) = \ln(\text{ch}\, t)$. Calculer $\text{ch}\, t$, $\text{sh}\, t$ et t en fonction de $\varphi(t)$.

b) En déduire que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)\, e^{-nu} du$, où $h(u) = \dfrac{\left(\ln\left(e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2u} - 1}}$.

c) Déterminer un équivalent de h en 0.

d) En déduire un équivalent de (I_n). Retrouver ainsi le résultat du 10 c).