D.M. 7 : solutions

Problème 1

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \le u_n(x) \le \dfrac{1}{x\,n^{1+\alpha}}$ et $1+\alpha > 1$, donc $\sum u_n(x)$ converge par comparaison avec une série de Riemann

2) a) Pour $x \in [a, +\infty[$, $0 \le u_n(x) \le \dfrac{1}{x\,n^{1+\alpha}} \le \dfrac{1}{a\,n^{1+\alpha}}$, qui est le terme général d'une série convergente indépendante de x ; d'où le résultat.

   b) Chaque fonction u_n tend vers 0 en $+\infty$. La convergence normale, donc uniforme, vue au a) permet d'appliquer le théorème de sommation des limites. On en conclut que S tend vers 0 en $+\infty$.

3) a) L'étude (élémentaire) de la fonction u_n montre que $N_\infty(u_n) = u_n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) = \dfrac{1}{2\,n^{\alpha+1/2}}\cdot$

   D'après la règle de Riemann, $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}\cdot$

   b) Chaque u_n tend vers 0 en 0. En cas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème de sommation des limites en 0, et S admet donc aussi 0 pour limite en 0

4) On peut écrire $xS(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$, avec $v_n(x) = \dfrac{x^2}{n^\alpha(1+nx^2)}\cdot$

   - D'une part, à n fixé, $v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\cdot$
   - D'autre part, $0 \le v_n(x) \le \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, terme général d'une série convergente indépendante de x. Ainsi, $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On peut donc appliquer le théorème de sommation des limites (ou de la double limite) :

   On obtient ainsi : $xS(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} = \zeta(\alpha+1) > 0$, ce qui se réécrit $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}\cdot$

5) Le réel $x > 0$ étant fixé, définissons f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \dfrac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}\cdot$ qui est bien sûr une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

   Comme f est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \le f(n) = u_n(x) \le \int_{n-1}^n f(t)\,dt \quad (\dagger)$

   D'autre part la fonction continue f est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{x}{t^\alpha}$, avec $\alpha < 1$ et car $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\,t^{\alpha+1}}$, avec $\alpha + 1 > 1$.

   Par sommation de $(\dagger)$, relation de Chasles, et passage à la limite, il vient :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \le S(x) \le \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

6) On pose $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{1-2\alpha}}{1+u^2}\,du$.

   a) Définissons g sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(u) = \dfrac{u^{1-2\alpha}}{1+u^2}\cdot$

   g est continue, $0 \le g(u) \le \dfrac{1}{u^{2\alpha-1}}$, avec $2\alpha - 1 < 1$, donc $\displaystyle\int_0^c g$ converge, et $0 \le g(u) \le \dfrac{1}{u^{2\alpha+1}}$, avec $2\alpha + 1 > 1$, donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} g$ converge. L'intégrale K est donc bien définie.

   b) Avec le changement de variable $u = x\sqrt{t}$, l'encadrement du 5. se réécrit :
$$2x^{2\alpha-1}\int_x^{+\infty} \frac{u^{1-2\alpha}}{1+u^2}du \le S(x) \le 2x^{2\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1-2\alpha}}{1+u^2}du = 2Kx^{2\alpha-1}.$$
   Le théorème des gendarmes pour les équivalents donne alors l'équivalent demandé

   c) On déduit immédiatement du b) que :

- si $1/2 < \alpha < 1$, $\lim\limits_0 S = 0$ (on le savait déjà par 3.a) et 3.b)).
- si $\alpha = 1/2$, $\lim\limits_0 S = 2K = \pi$.
- si $0 < \alpha < 1/2$, $\lim\limits_0 S = +\infty$.

d) Chaque u_n tend vers 0 en 0 ; on déduit donc du c) et de la contraposée du théorème de sommation des limites que si $\alpha \leq 1/2$, $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, a]$.

Problème 2

7) a) Pour $t > 0$, $\sum f_n(t)$ est une série géométrique de raison $e^{-t}e^{ix}$, dont le module est $e^{-t} < 1$.
Cette série est donc convergente et $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = t^{\alpha-1}\dfrac{e^{-t}e^{ix}}{1-e^{-t}e^{ix}} = \dfrac{t^{\alpha-1}e^{ix}}{e^t - e^{ix}}$.
b) Par le a), $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| = t^{\alpha-1}\left|\dfrac{e^{-(n+1)t}e^{i(n+1)x}}{1-e^{-t}e^{ix}}\right| = t^{\alpha-1}\dfrac{e^{-nt}}{|e^t - e^{ix}|}$.
Mais $|e^t - e^{ix}|^2 = (e^t - \cos x)^2 + \sin^2 x$ et $e^t - \cos x \geq 1 - \cos x \geq 0$, donc $(e^t - \cos x)^2 \geq (1 - \cos x)^2$.
Finalement, $|e^t - e^{ix}|^2 \geq (1-\cos x)^2 + \sin^2 x = 2 - 2\cos(x) = 4\sin^2(x/2)$, d'où l'inégalité demandée.

8) a) Première étape : avec le rappel de l'énoncé, on peut admettre qu'on sait que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = e^{inx}\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1}dt = \frac{e^{inx}\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$$

la dernière égalité étant obtenue par le changement de variable $u = nt$ dans l'intégrale généralisée.
On sait donc que : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{inx}}{n^\alpha}\Gamma(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n$.
On comprend donc qu'on est dans une situation d'intégration terme à terme.
b) Deuxième étape, méthode 1 (essai !) : on essaie d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue.
L'hypothèse clef est la convergence de $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$.
Or ici $\int_0^{+\infty}|f_n| = \int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1}dt = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$ n'est un T.G.S.C que si $\alpha > 1$.
Donc le théorème de Lebesgue ne va pas permettre de traiter la question pour tous les $\alpha > 0$.
On est encore dans une situation de semi-convergence.
c) Deuxième étape, méthode 2 (quand le théorème d'I.T.T. de Lebesgue ne s'applique pas) :

$$\boxed{\text{on écrit } f = S_n + R_n \text{ et on va chercher à montrer que } \int_0^{+\infty} R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

la fonction f calculée au 6) est bien continue par morceaux, et de même donc toutes les fonctions R_n définie par $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$ le sont aussi car $R_n = f - S_n$. La majoration du 7) b), montre que $|R_n|$ est majoré sur $\mathbb{R}^{+*}$ par une fonction intégrable donc chaque fonction R_n est intégrable. Mais mieux, on va utiliser cette majoration pour majorer $|\int_0^{+\infty} R_n|$.
En effet avec le 7) b), en intégrant l'inégalité :

$$|\int_0^{+\infty} R_n| \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{2|\sin(x/2)|n^\alpha}$$

et par majoration, on conclut que bien que $\int_0^{+\infty} R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n$.
Avec l'expression de f trouvée au 7) a), et par permutation des sommes finies dans S_n avec l'intégrale on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{ix}}{e^t - e^{ix}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}.\Gamma(\alpha).$$

ce qui est exactement la première formule (8.1) demandée par l'énoncé.
Pour passer à la seconde, il s'agit de passer à la partie imaginaire. C'est immédiat pour le membre de gauche de (8.1).
Pour le membre de droite :

$$\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} = \frac{e^{ix}(e^t - e^{-ix})}{(e^t - e^{ix})(e^t - e^{-ix})} = \frac{e^{ix}e^t - 1}{e^{2t} - 2\cos(x)e^t + 1}$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient bien :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}}\right) = \frac{\sin(x)e^t}{e^{2t} - 2\cos(x)e^t + 1} = \frac{\sin(x)}{e^t - 2\cos(x) + e^{-t}} = \frac{\sin(x)}{2\operatorname{ch}(t) - 2\cos(x)}$$

On en déduit immédiatement (8.2)

9) Dans ce qui suit, on peut supposer $x \neq \pi$. Le résultat demandé est évident si $x = \pi$.
On applique (8.2) avec $\alpha = 1$ et en repassant à la forme exponentielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} &= \sin x \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t} - 2\cos x\, e^t + 1}\, dt \\
&= \sin x \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 - 2\cos x\, u + 1} \qquad \text{en posant } u = e^t. \\
&= \sin x \int_1^{+\infty} \frac{du}{(u - \cos x)^2 + \sin^2 x} \qquad \text{méthode de la forme canonique} \\
&= [\arctan(\frac{u - \cos x}{\sin x})]_1^{+\infty}
\end{aligned}$$

On distingue le cas $x \in]0,\pi[$ pour lequel, dans le crochet précédent le dénominateur $\sin(x)$ est strictement positif et on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(x/2))$$

et comme $x/2 \in]0,\pi/2[$, $\arctan(\tan(x/2)) = x/2$ ce qui conclut la démonstration de la formule demandée dans ce cas :

$$\forall\, x \in]0,\pi[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Dans le cas où $x \in]\pi, 2\pi[$: on remarque que le membre de gauche est 2π-périodique et impair.
Donc si on le note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$, alors pour $x \in]\pi, 2\pi[$, $S(x) = S(x - 2\pi) = -S(2\pi - x)$ (1) avec $2\pi - x \in]0,\pi[$.
Or pour $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$, si on calcule $g(2\pi - x) = \frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{-\pi + x}{2} = -g(x)$ (2), on conclut de (1) et (2) que l'égalité $g = S$ sur $]0,\pi[$ se prolonge à $]\pi, 2\pi[$.

10) a) $\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} t - \cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t\big(1-(\cos x)/(\operatorname{ch} t)\big)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos^n x}{\operatorname{ch}^{n+1} t}$, car $\left|\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} t}\right| \le |\cos x| < 1$.

L'égalité (8.2) se réécrit donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) dt$, où $u_n(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}\cos^n x}{\operatorname{ch}^{n+1} t}$.

On vérifie que chaque fonction u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.Le Faire !

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n| = |\cos x|^n I_n \le |\cos x|^n I_0$, qui est le terme général d'une série convergente puisque $|\cos x| < 1$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, qui donne l'égalité demandée.

b)

- $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, S(t) = t^{\alpha-1}\Big(\dfrac{\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}}\Big) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - 1}$ (série géométrique) donc $S \in \mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$,
- $S(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{t^{3-\alpha}}$
- $S(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

Par théorèmes de comparaison, comparaison à l'exemple de Riemann, S est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 2$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, notons $v_n(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}^{n+1} t}$, de sorte que $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} v_n$.

- Si $\sum I_n$ converge, les v_n étant positives, le théorème d'intégration terme à terme assure que S est intégrable.
- Réciproquement, si S est intégrable, la positivité des v_n donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \le \int_0^{+\infty} S$, ce qui montre que la série à termes positifs $\sum I_n$ converge

On déduit donc du b) que $\sum I_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

d) Conservons la notation v_n du c). Comme la suite (v_n) est positive et décroissante, la suite $\big((-1)^n I_n\big)$ est alternée et décroissante en valeur absolue ; de plus, le théorème de convergence dominée, avec domination par v_0, montre que (I_n) converge vers 0. D'après le théorème des séries alternées, $\sum(-1)^n I_n$ converge.

11) **Motivation des deux questions suivantes :** *obtenir directement à partir de l'écriture intégrale un équivalent de I_n et retrouver ainsi en particulier le résultat sur $\sum I_n$. Le résultat de la question 10) à venir est un équivalent en $+\infty$ de la transformée de Laplace de fonctions, précisant le théorème de la valeur initiale*

a) Notons d'abord que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-nu}\, du$ est bien définie puisque $\forall\, u > 0$, $\left|g(u)\, e^{-nu}\right| \le |g(u)|$.

L'équivalent qu'on veut montrer revient à montrer que :

$$n^\lambda \left(\int_0^{+\infty} g(u)\, e^{-nu}\, du \;-\; a\,\Gamma(\lambda)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\dagger)$$

Or par déf. $\Gamma(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\lambda-1} dt$, en posant $t = nu$ dans cet intégrale, on a :

$$\Gamma(\lambda) = n^\lambda \int_0^{+\infty} u^{\lambda-1} e^{-nu}\, du, \quad (\ddagger)$$

donc ($\dagger$) est bien équivalent à la condition de l'énoncé.

b) Par hypothèse sur g, on sait que $g(u) - a\, u^{\lambda-1} \underset{u\to 0}{=} o(u^{\lambda-1})$, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall u \in]0,\delta],\ \left|g(u) - a\, u^{\lambda-1}\right| \le \frac{\varepsilon}{2\,\Gamma(\lambda)}\, u^{\lambda-1}.$$

Ce δ étant ainsi fixé, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^\delta \left(g(u) - a\,u^{l-1}\right) e^{-nu} du \right| \le \int_0^\delta \left|g(u) - a\,u^{\lambda-1}\right| e^{-nu}\,du \le \frac{\varepsilon}{2\,\Gamma(\lambda)} \int_0^\delta u^{\lambda-1}\,e^{-nu}\,du \le \frac{\varepsilon}{2\,n^\lambda},$$

la dernière inégalité étant obtenue avec l'expression (‡) de Γ.

c) Par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_\delta^{+\infty} \left(g(u) - a\,u^{\lambda-1}\right) e^{-nu}\,du \right| \le \int_\delta^{+\infty} \left|g(u) - a\,u^{l-1}\right| e^{-u}\,e^{-(n-1)u}\,du \le C\,e^{-(n-1)\delta},$$

où $C = \displaystyle\int_\delta^{+\infty} |g(u) - a\,u^{l-1}|\,e^{-u}\,du.$

d) Par croissances comparées, pour $n \ge N$ convenable, $C\,e^{-(n-1)\delta} \le \dfrac{\varepsilon}{2\,n^\lambda}$.

Le b), le c), la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire donnent alors :

$$\forall n \ge N,\ n^\lambda \left| \int_0^{+\infty} \left(g(u) - a\,u^{\lambda-1}\right) e^{-nu}\,du \right| \le \varepsilon,$$

ce qu'il fallait prouver.

12) a) Par déf. $\operatorname{ch} t = e^{\varphi(t)}$, $\operatorname{sh} t = \sqrt{e^{2\varphi(t)} - 1}$ et $t = \ln(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) = \ln\left(e^{\varphi(t)} + \sqrt{e^{2\varphi(t)} - 1}\right)$.

b) Selon a),

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}^n t\,\operatorname{sh} t} \cdot \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^{\varphi(t)} + \sqrt{e^{2\varphi(t)} - 1}\,\right)\right)^{\alpha-1}}{e^{n\varphi(t)}\,\sqrt{e^{2\varphi(t)} - 1}}\,\varphi'(t)dt$$

φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, le changement de variable $u = \varphi(t)$ donne $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^u + \sqrt{e^{2u-1}}\,\right)\right)^{\alpha-1}}{e^{nu}\,\sqrt{e^{2u} - 1}}\,du = \int_0^{+\infty} h(u)\,e^{-nu}\,du$

c) Comme $\sqrt{e^{2u} - 1} \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{2u}$ et $\ln\left(e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}\right) \underset{u\to 0}{\sim} e^u + \sqrt{e^{2u} - 1} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{2u}$, donc

$$h(u) \underset{u\to 0}{\sim} (\sqrt{2u})^{\alpha-2} = (2u)^{\alpha/2-1}.$$

d) La fonction h vérifie les hypothèses de la question 10. avec $\lambda = \alpha/2$ et $a = 2^{\alpha/2-1}$; on en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{\alpha/2-1}\,\Gamma(\alpha/2)}{n^{\alpha/2}}$.

En particulier par l'exemple de Riemann, $\sum I_n$ converge si et seulement si $\dfrac{\alpha}{2} > 1$; c'est le résultat du. 10 c).