Souvenirs DM 6 : séries de Fourier et dév. eulériens

Qu'est-ce qu'une série trigonométrique ?

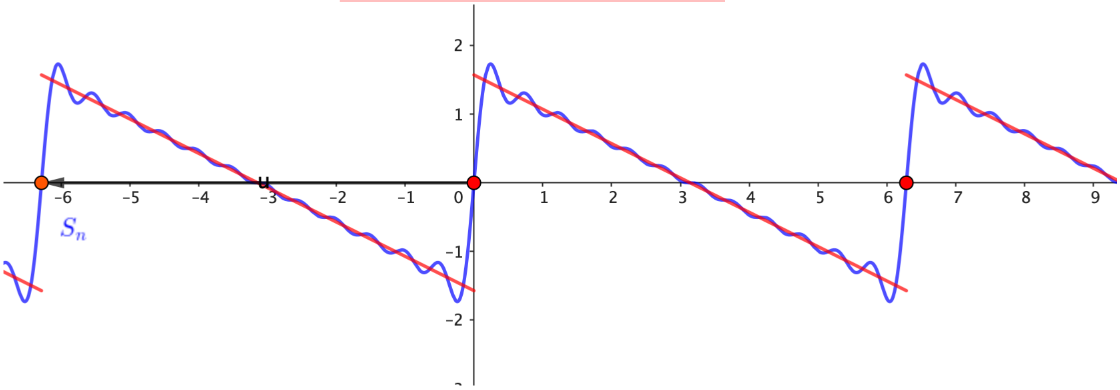
Une série de fonctions dont les sommes partielles s'écrivent :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ S_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (1)$$

Une C.S. de convergence normale : si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. ce qui équivaut aussi à la CV de $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ par équivalence entre N_1 et N_2 dans $\mathbb{R}^2$.

Un exemple important où il n'y a pas convergence uniforme :

$$\forall\, x \in]0, 2\pi[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$$



Lemme de récupération des coefficients en cas de convergence uniforme :

Si (S_n) CVU vers une fonction f alors :
$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$ et $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$ et $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \quad (2)$
(on note habituellement $\alpha_0 = a_0/2$).

Qu'est-ce qu'une série de Fourier ? Changement de point de vue !

On part d'une fonction f et on *définit* les coefficients de Fourier a_k, b_k de f par les formules (2).

La série de Fourier de f est alors la série définie par (1). Le problème *non trivial* est de savoir si ces (S_n) convergent vers f.Attention ce n'est pas toujours vrai, même pour une fonction *continue périodique !*. En revanche, il y a convergence simple dans le cas $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Théorème de Dirichlet (admis) si $f \in \mathcal{CM}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont les coefficients de Fourier de f définis par (2), alors la série de Fourier de f converge vers la fonction « régularisée » de f, autrement dit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_{reg}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

N.B. Le sujet du DS 5 2021/2022 Partie IV démontre, mieux, la convergence normale de la série de Fourier, pour f continue, $\mathcal{C}^1$-par-morceaux

Une application étonnante , a priori loin de l'analyse harmonique

Via le théorème de Dirichlet appliqué à $x \mapsto \cos(ax)$, on montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right)$$

formule prouvée par Euler au siècle précédent Fourier, par d'autres méthodes...