DM 6 : séries de Fourier et dév. eulériens, solutions

1) a) Notons $u_k = a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|u_k(t)| \le |a_k|.|\cos(kt)| + |b_k|.|\sin(kt)| \le |a_k| + |b_k| \quad (*)$$

par inégalité triangulaire. Par hypothèse de l'énoncé, $(|a_k| + |b_k|)$ est terme général de série convergente (par somme de T.G.S.C.) donc $\sum |u_k(t)|$ converge par la majoration $(*)$. La série $\sum u_k(t)$ est donc **absolument convergente** donc **convergente**.
Mieux, la majoration $(*)$ indépendante de t donne que :

$$\|u_k\|_\infty \le |a_k| + |b_k|$$

donc la série de fonction $\sum u_k$ converge *normalement* sur $\mathbb{R}$ en particulier **uniformément**.
Comme les fonctions $t \mapsto u_k(t)$ sont **continues**, on en déduit que la somme S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u_k est 2π-périodique, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $u_k(t + 2\pi) = u_k(t)$. En sommant ces inégalités pour $k = 1 \dots, n$ puis en passant à la limite pour $n \to +\infty$, on a $S(t + 2\pi) = S(t)$.
Donc S est 2π-périodique.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, en supposant que $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, on peut écrire :

$$a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) = A_n\left(\frac{a_n}{A_n}\cos(nt) + \frac{b_n}{A_n}\sin(nt)\right)$$

Comme $\left(\frac{a_n}{A_n}, \frac{b_n}{A_n}\right) \in \mathbb{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2\}$, on sait qu'il existe un $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\begin{cases} \frac{a_n}{A_n} = \cos(\varphi_n) \\ \dfrac{b_n}{A_n} = \sin(\varphi_n) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient :

$$a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt) = A_n(\cos(\theta_n)\cos(t) + \sin(\theta_n)\sin(t)) = A_n\cos(t - \theta_n)$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|u_n(t)| = |a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)| \le A_n$$

On conclut alors, de même qu'au a), que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $\|u_n\|_\infty \le A_n$ et (A_n) terme général d'une série convergente. Les autres conclusions du a) suivent de même.
c) Il suffit de montrer que $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \le |a_n| + |b_n|$
En posant $x = |a_n|$ et $y = |a_n|$, il suffit de montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{x + y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (**)$$

Or $(**) \Leftrightarrow x + y \le x + y + 2\sqrt{xy}$ en mettant au carré, ce qui est trivialement vrai.
Donc $(**)$ est vraie et la conclusion.
Culturel : une fonction f telle que $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ pour tout x, y dans son ensemble de définition est dite *sous-additive*. L'inégalité $(*)$ dit que la racine carrée est sous-additive. Ce résultat se généralise à toutes les $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in]0,1]$ et plus généralement aux fonctions concaves croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) FAUX. Pour $x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$, donc $e^{ix} \neq 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{e^{ix/2}(-2i\sin(x/2))}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix/2} - e^{i(n+1/2)x}}{-2i\sin(x/2)}$. C'est pratiquement la formule de l'énoncé à part le i au dénominateur.

En revanche $S_n'(x) = -\dfrac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{2\sin(\frac{x}{2})}$.

b) Ce calcul a été fait de deux ou trois façons différentes sur une planche du chapitre S1. Ce sera quasiment du cours au chapitre S3 (théorème radial d'Abel pour le développement en série entière de $\ln(1+x)$.).

c) VRAI On a vu au a) que $S_n'(x) = -\dfrac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{2\sin(\frac{x}{2})}$.

Par intégration entre π et x, $\displaystyle\int_\pi^x S_n'(t)dt = S_n(x) - S_n(\pi) = S_n(x) - A_n$.

Donc $\displaystyle S_n(x) = A_n + \int_\pi^x S_n'(t)dt = A_n - \int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$

ce qui donne exactement la formule de l'énoncé en séparant le dénominateur en deux.

d) On note $f(t) = \dfrac{1}{2\sin(t/2)}$.

Par I.P.P. en primitivant $t \mapsto e^{i(n+1/2)t}$ et en dérivant f, on a : $\displaystyle I_n = \left[\frac{f(t)e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{i(n+\frac{1}{2})}\right]_\pi^x + \frac{1}{i(n+\frac{1}{2})}\underbrace{\int_\pi^x f'(t)e^{i(n+\frac{1}{2})t}dt}_{J_n}$.

Ainsi $\displaystyle |I_n| \leq \frac{|f(x)| + |f(\pi)|}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2}|J_n|$ et $\displaystyle |J_n| \leq \int_\pi^x |f'(t)|dt$ majorant indép. de n.

Ceci prouve que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par majoration par une suite qui tend vers zéro □

Avec l'égalité du c), comme (A_n) converge et (I_n) converge ; on en déduit bien que $(S_n(x))$ converge.

Plus précisément en notant ici $A = -\ln(2) \in \mathbb{R}$ la limite de (A_n), on obtient que $\displaystyle S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A - \frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}dt$.

e) Bien sûr $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}\Big)$.

Donc par d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}\Big(A - \frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}dt\Big) = -\frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{\sin(t/2)}{\sin(t/2)}dt$

Donc finalement on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi - x}{2}$ comme annoncé.

D'autre part, avec la partie réelle de $(S_n(x))$ on obtient que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}\Big(A - \frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin(\frac{t}{2})}dt\Big) =: \ell$$

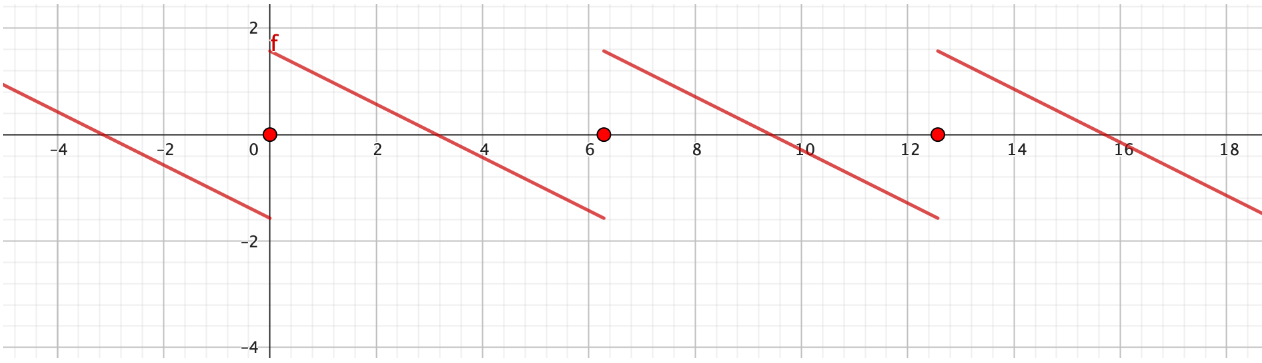
Or, on calcule,

$$\begin{aligned}
\ell &= -\ln(2) - \frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}dt \\
&= -\ln(2) - [\ln(\sin(t/2)]_\pi^x \\
&= -\ln(2\sin(\frac{x}{2}))
\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que :

$$\forall\, x \in]0, 2\pi[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2\sin(\frac{x}{2}))$$

f) La fonction σ est 2π-périodique comme limite simple d'une suite de fonctions 2π-périodiques et elle vaut 0 en 0 trivialement.
Par le e) on connaît $\sigma_{|]0,2\pi[}$ et il suffit donc de reproduire son tracé par translation, avec la valeur particulière 0 en 0.



Comme la fonction σ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et que le terme général $x \mapsto \sin(kx)/k$ est continue sur $\mathbb{R}$, on est sûr que la convergence *n'est pas* uniforme.

3) On fixe un $k_0 \in \mathbb{N}^*$, on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(t) = a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$ et $v_k(t) = \cos(k_0 t)u_k(t)$.
On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)$ et $V_n = \cos(k_0 t)S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k(t)$.
On sait que $||S_n - f||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On note $g(t) = \cos(k_0 t)f(t)$.
Affirmation. $||V_n - g||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ autrement dit que (V_n) converge uniformément vers g.
Dém. de l'affirmation : Or $||V_n - g||_\infty \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |\cos(k_0 t)|.||S_n - f||_\infty \leq ||S_n - f||_\infty$ d'où la conclusion.
Application de cette affirmation :
On considère $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k_0 t)dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$.
Comme g est la limite uniforme de la série de fonctions $\sum v_k$, par théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on sait que :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k_0 t)dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\,(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(k_0 t)dt + b_k\int_{\pi}^{\pi}\sin(kt)\cos(k_0 t)dt) + \frac{\alpha_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k_0 t)dt \tag{1}$$

Or comme $k_0 \neq 0$, la dernière intégrale dans (1) est nulle, et par un calcul à faire on montre que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, k \neq k_0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(k_0 t)dt = 0 \tag{2}$$

et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{\pi}^{\pi}\sin(kt)\cos(k_0 t)dt = 0 \tag{3}$$

Avec (2) et (3) dans (1), on obtient enfin que :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k_0 t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_{k_0}\cos^2(k_0 t)dt = a_{k_0}$$

On montre de même que :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(k_0 t)dt = b_{k_0}.$$

On traite enfin de même le cas $k_0 = 0$.

4) a) Comme par hasard cette fonction f est celle obtenue à la fin du 2). On remarque déjà que cette fonction est *impaire* sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne facilement que tous les coefficients a_k sont nuls.
On calcule donc seulement les $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-t}{2}\sin(kt)dt$.
On sépare l'intégrale en deux $b_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\pi\sin(kt) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\sin(kt)dt$.
La première intégrale est facilement nulle.
Par intégration par parties, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\sin(kt)dt = \frac{1}{2\pi}[-\frac{t\cos(kt)}{k}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kt)}{k}dt = -\frac{1}{k}$
On obtient donc que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $b_k = 1/k$.
b) La série de Fourier de f est donc par a), $\sum\sin(kx)/k$.
D'autre part f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, car f et f' ont une limite finie à gauche et à droite à tous les points $2k\pi$ donc le théorème de Dirichlet s'applique et redonne exactement la formule de la fin du 2).

5) Le problème est que cette famille n'est *pas sommable*. Par exemple, en se restreignant aux k positifs, la suite $u_k = \frac{1}{x-k\pi} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k\pi}$ est terme général de série divergente par comparaison avec la série harmonique (tg. de signe constant).

6) a) Comme le cosinus est pair, on a $\cos(a(-\pi)) = \cos(a\pi)$ donc $\lim_{-\pi^+} f = \lim_{\pi^-} f$ ce qui montre la continuité de la 2π-périodisée aux points de la forme $\pi+2k\pi$. Le caractère $\mathcal{C}^1$ p.m. est alors évident.
b) Les coeff. b_n sont nuls et les $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(at)\cos(nt)dt$
Donc $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((a+n)t)+\cos((n-a)t))dt = \frac{1}{\pi}[\frac{\sin((a+n)t)}{a+n} + \frac{\sin((n-a)t)}{n-a}]_{t=0}^{t=\pi}$.
Donc $a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((a+n)\pi)}{a+n} + \frac{\sin((n-a)\pi)}{n-a}\right) = (-1)^n\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\frac{2a}{a^2-n^2}$.
c) Le théorème de Dirichlet s'applique donc pour tout $x\in[-\pi,\pi]$, $\cos(ax) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx)$
donc $\cos(ax) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\frac{2a}{n^2-a^2}\sin(\pi a)\cos(nx)$.
La formule précédente, pour $x=\pi$, donne, en divisant par $\sin(\pi a)$, donne :
$\mathrm{cotan}(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2a}{\pi(n^2-a^2)}\cos(n\pi)$
Compte-tenu de $\cos(n\pi) = (-1)^n$, et en posant $x = \pi a$, on la formule de l'énoncé sous la forme :
$\mathrm{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$ □

7) a) Par regroupement des termes d'indices k et $-k$, en notant $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}$, on a :

$$S_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2}$$

En posant $u_k(x) = \frac{2x}{x^2-k^2}$, on a pour chaque $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$ fixé, $u_k(x) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{-k^2}$ T.G.S.C ; donc par théorème de comparaison à une série de T.G. de signe constant, on en déduit que $u_k(x)$ T.G.S.C.
Donc S_n converge et on peut écrire pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-k^2} \quad (\dagger)$$

b) (i) L'expression (†) qu'on vient d'obtenir définit bien une fonction impaire.

(ii) N.B Cela n'a pas de sens d'écrire $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{n+x}$ car la famille des $(1/(n+x))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est PAS sommable !

Donc on revient aux sommes partielles du a)

Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$:

$$S_n(x+1) = \sum_{k=-n}^{+n} \frac{1}{x+1+k} = \sum_{i=-n+1}^{n+1} \frac{1}{x+i}$$

où on a posé $i = k+1$.

Donc $S_n(x+1) = S_n(x) + \dfrac{1}{x+n+1} - \dfrac{1}{x-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) + 0 + 0$. Donc $f(x+1) = f(x)$ par unicité de la limite.

c)

$$\begin{aligned} S_{2n}(2x) &= \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{1}{2x+k} = \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{2x+2l} + \sum_{l=-n+1}^{n-1} \frac{1}{2x+2l+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{x+l} + \frac{1}{2}\sum_{l=-(n-1)}^{n-1} \frac{1}{x+1/2+l} \\ &= \frac{1}{2}S_n(x) + \frac{1}{2}S_{n-1}(x+1/2), \end{aligned}$$

ce qui donne en faisant tendre n vers $+\infty$

$$f(2x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

d) (i) Considérons la fonction $h : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-x^2}$.

Soit $a > 1$ Pour tout $x \in [-a,a]$, on a $x^2 \in [0,a^2] \subset [0,1]$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^2 - x^2 \geq k^2 - a^2 \geq 0$ et donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{k^2-x^2} \leqslant \frac{1}{k^2-a^2}$$

majoration par un T.G.S.C.

La série $\sum_k \frac{1}{k^2-x^2}$. est donc normalement convergente sur $[-a,a]$ et les fonctions $x \mapsto 1/(k^2 - x^2)$ sont continues sur $[-a,a]$, donc la somme de la série h est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a \in [0,1[$ donc sur $]-1,1[$.

(ii) L'expression déjà obtenue $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ permet d'en déduire la continuité de f sur $]0,1[$ et par 1-périodicité de f sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$

(iii) Par ce qui précède et prop. de la cotangente, on sait que g est continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$.

Par 1-périodicité de g, il suffit de montrer que g est continue en 0.

Or d'un côté $\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x) = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \pi\dfrac{1+o(x)}{\pi x + o(x)} = \dfrac{1}{x} + o(1)$ et de l'autre $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2xh(x)$ avec h continue en 0.

Donc par différence $g(x) = 2xh(x) + o(1)$ donc g est bien continue en 0.

e) On veut donc montrer que g est la fonction nulle.

(i) On pose $\tilde{f}(x) = \pi x\,\mathrm{cotan}(x)$, on va montrer

Montrons que, comme f, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}Z, f(2x) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x) + \tilde{f}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{f}(2x) &= \pi\frac{\cos 2\pi x}{\sin 2\pi x} = \pi\frac{\cos^2\pi x - \sin^2\pi x}{2\sin\pi x\cos\pi x} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x} - \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}(\mathrm{cotan}\,\pi x - \tan\pi x) = \frac{\pi}{2}(\mathrm{cotan}\,\pi x + \mathrm{cotan}(\pi x + \pi/2)) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{f}(x) + \tilde{f}(x+1/2)) \end{aligned}$$

(ii) La fonction g qui vaut $g(x) = f(x) - \tilde{f}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et prolongée à $\mathbb{R}$ par continuité, vérifie donc trivialement la même relation pour $x \in \mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$: $(*) \quad g(2x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(x+1/2))$.

Comme g est continue, en faisant tendre x vers $x_0 \in \frac{1}{2}Z, x \neq x_0$, on trouve que $(*)$ est aussi vraie pour un élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$. - La fonction $|g|$ est contimue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $c \in [0,1]$ tel que $|g(c)| = \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$. Mais alors d'après $(*)$, on a l'inégalité

$$|g(c)| = \left|\frac{g\left(\frac{c}{2}\right) + g\left(\frac{c+1}{2}\right)}{2}\right| \leqslant \frac{\left|g\left(\frac{c}{2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{c+1}{2}\right)\right|}{2} \leqslant \frac{|g(c/2)|}{2} + \frac{|g(c)|}{2}$$

et donc,

$$\frac{|g(c)|}{2} \leqslant \frac{|g(c/2)|}{2} \text{ ce qui entraine } |g(c/2)| \geqslant \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$$

On en déduit donc $|g(c/2)| = \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$ et par une récurrence immé diate, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\max_{x\in[0,1]} |g(x)| = |g(c/2^n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0) = 0$$

(iii) Par 1-périodicité g est nulle partout.