**Banque CCINP :** Ex. 37, 39 sauf le 2), 40, 44,45 pour la semaine 7, et 34a), 35, 36, 38. 2) pour la semaine 8.

## Ouverts, fermés pour la semaine 7

**Exercice 1.** Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées et plus génralement déterminer leur intérieur et leur adhérence :
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$ .

**Exercice 2.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide *fermé, majoré*. Montrer que $A$ admet un maximum.

**Exercice 3** (Quasi QdC, complète l'ex. 44 de la banque CCINP)**.**
Soient $A$ et $B$ deux parties d'un e.v.n. $E$.
a) Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ ? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion ?)
b) Même question pour $Int(A \cup B)$ et $Int(A) \cup Int(B)$.
c) Quelles relations entre $Int(E \setminus A)$, $\overline{E \setminus A}$, $E \setminus \overline{A}$, $E \setminus Int(A)$ ?

**Exercice 4.** Soit $U$ un ouvert d'un e.v.n. Montrer que $Fr(U)$ est d'intérieur vide.

**Exercice 5** (Somme de deux ouverts, de deux fermés)**.** Soit $E$ un e.v.n. Pour deux parties $A$ et $B$ quelconques de $E$, on définit $A + B := \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$.
a) Montrer que si $A$ ou $B$ sont ouverts alors $A + B$ est ouvert.
b) Montrer que si $A$ et $B$ sont fermés alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.

## Comment étudier la continuité d'une application entre e.v.n de dim. finie. : sem. 8

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b) Montrer que $f$ est continue au point $0 = (0,0)$.
*Indication* – On pourrait utiliser les coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ dans lesquelle, $r = \|(x,y)\|_2$.

**Exercice 7.** Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction $f$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

## Ouverts et fermés comme préimage d'ouverts et de fermés

**Exercice 8.** Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$\begin{array}{ll} A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\right\} & B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ 0 \leq x \leq y\right\} \\ C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| x| < 1, |y| \leq 1\right\} & D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\} \\ E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\right\} & F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\right\}. \end{array}$$

**Exercice 9.** soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Montrer que si $Z(f) = \{x \in [a,b],\ f(x) = 0\}$ est non vide, alors $Z(f)$ admet un plus grand et un plus petit élément.

## Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

**Exercice 10.** a) Justifier que det : $A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A) \in \mathbb{K}$ est *continue.*
b) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.
c) Montrer que l'application $GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue.

**Exercice 11.** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
*Indication* – **(M1)** On pourra considérer pour approcher une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ les matrices de la forme $A + \frac{1}{k} I_n$.
**(M2)** Si $A$ est de rang $r$, utiliser une forme réduite de $A$ pour la relation d'équivalence, qu'on peut alors approcher facilement par des matrices inversibles.
b) Soit $\Delta = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\Delta$.

**Exercice 12** (Application de l'exercice précédent)**.** a) Montrer que si $A$ et $B$ sont dans $M_n(\mathbb{K})$ et $A$ est inversible, alors $AB$ et $BA$ sont semblables.
En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
b) En utilisant le fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{K})$ montrer que pour toutes matrices $A, B$ dans $M_n(\mathbb{K})$, on a encore $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

## Continuité des applications linéaires/multi linéaire et Norme d'opérateur

**Exercice 13.**
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.
(i) L'application $\varphi$ est-elle continue de $(E, \| \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ ?
(ii) L'application $\varphi$ est-elle continue de $(E, \| \|_1)$ dans $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 14** (Positive entraîne continue )**.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, notée $\| \|$.
Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $E$ qui est *positive* en ce sens que si $\forall f \in E$, $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.
Montrer que $\varphi$ est continue de $(E, \| \|)$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 15** (Quasiment du cours...)**.** Justifier la continuité des applications suivantes avec le critère de continuité des applications linéaires ou bilinéaires. Dans le cas des A.L. déterminer leur norme d'opérateur. :
a) Si $(E, \| \|)$ est un e.v.n. quelconque, alors l'addition $E \times E \to E$, $(u,v) \mapsto u+v$ est continue.
b) Si $(E, ( \mid ))$ est un espace préhilbertien, et que $a \in E$ est une vecteur fixé, alors l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto (a|u)$ est continue.
c) Si $(E, \| \|)$ est un e.v.n. quelconque, montrer que l'application mult de $\mathbb{R} \times E$ dans $E$ qui à $(\lambda, x)$ associe $\lambda.x$ (la multiplication externe) est continue.

**Exercice 16** (Détermination explicite de normes subordonnées)**.** On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $N_1$ et de la norme $N_\infty$, définit par $N_1(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $N_\infty(x_1,\dots,x_n) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ on considère $A$ comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $A$ définit l'endomorphisme $X \mapsto AX$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer la norme $|||A|||$ en fonction des entrées $(a_{i,j})$ de $A$ si

a) On considère la norme subordonnée au choix de la norme $N_1$ au départ et à l'arrivée (on la notera $|||A|||_{\infty,\infty}$)
b) On considère la norme subordonnée au choix de la norme $N_\infty$ au départ et à l'arrivée (on la notera $|||A|||_{1,1}$)
c) On note $(x,y) \mapsto (x|y)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$N_1(x) = \max_{N_\infty(y)=1} |(x|y)|, \qquad N_\infty(x) = \max_{N_1(y)=1} |(x|y)|$$

d) Retrouver le résultat du b) à l'aide de celui du a) et du c).

**Exercice 17** (Avatar de la relation de Heisenberg en mécanique quantique)**.** Soient $E$ un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ continus tels que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha \, \mathrm{Id}_E$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha v^n.$$
b) En déduire que $\alpha = 0$.