Banque CCINP : Ex. 37, 39 sauf le 2), 40, 44,45 pour la semaine 7, et 34a), 35, 36, 38. 2) pour la semaine 8.

Ouverts, fermés pour la semaine 7

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées et plus génralement déterminer leur intérieur et leur adhérence : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/$

Exercice 2.
Soit $A\subset\mathbb{R}$ un ensemble non vide *fermé, majoré.* Montrer que A admet un maximum.

Exercice 3 (Quasi QdC, complète l'ex. 44 de la banque CCINP)**.**
Soient A et B deux parties d'un e.v.n. E.
a) Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion ?)
b) Même question pour $Int(A\cup B)$ et $Int(A)\cup Int(B)$.
c) Quelles relations entre $Int(E\setminus A)$, $\overline{E\setminus A}$, $E\setminus\overline{A}$, $E\setminus Int(A)$?

Exercice 4. Soit U un ouvert d'un e.v.n. Montrer que $Fr(U)$ est d'intérieur vide.

Exercice 5 (Somme de deux ouverts, de deux fermés)**.** Soit E un e.v.n. Pour deux parties A et B quelconques de E, on définit $A+B := \{a+b,\ (a,b)\ \in A\times B\}$.
a) Montrer que si A et B sont ouverts alors $A+B$ est ouvert.
b) Montrer que si A et B sont fermés alors $A+B$ n'est pas nécessairement fermé.

Comment étudier la continuité d'une application entre e.v.n de dim. finie. : sem. 8

Exercice 6. Soit $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, telle que $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
b) Montrer que f est continue au point $0=(0,0)$.
Indication – On pourrait utiliser les coordonnées polaires $x=r\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$ dans lesquelle, $r=\|(x,y)\|_2$.

Exercice 7. Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction f définie par $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$.

Ouverts et fermés comme préimage d'ouverts et de fermés

Exercice 8. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$\begin{array}{ll} A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\right\} & B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ 0\leq x\leq y\right\} \\ C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| x|<1, |y|\leq 1\right\} & D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q} \text{ et } y\in\mathbb{Q}\right\} \\ E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\notin\mathbb{Q} \text{ ou } y\notin\mathbb{Q}\right\} & F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\right\}. \end{array}$$

Exercice 9. soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si $Z(f)=\{x\in[a,b],\ f(x)=0\}$ est non vide, alors $Z(f)$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

Exercice 10. a) Justifier que $\det : A\in M_n(\mathbb{K})\mapsto\det(A)\in\mathbb{K}$ est *continue.*
b) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.
c) Montrer que l'application $GL_n(\mathbb{K})\to GL_n(\mathbb{K})$, $A\mapsto A^{-1}$ est continue.

Exercice 11. Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
Indication – **(M1)** On pourra considérer pour approcher une matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ les matrices de la forme $A+\frac{1}{k}I_n$.
(M2) Si A est de rang r, utiliser une forme réduite de A pour la relation d'équivalence, qu'on peut alors approcher facilement par des matrices inversibles.
b) Soit $\Delta=\{A\in M_n(\mathbb{K}), \det(A)=0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de Δ.

Exercice 12 (Application de l'exercice précédent)**.** a) Montrer que si A et B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ et A est inversible, alors AB et BA sont semblables.
En déduire que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.
b) En utilisant le fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{K})$ montrer que pour toutes matrices A,B dans $M_n(\mathbb{K})$, on a encore $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Continuité des applications linéaires/multi linéaire et Norme d'opérateur

Exercice 13.
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$.
(i) L'application φ est-elle continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$?
(ii) L'application φ est-elle continue de $(E, \|\ \|_1)$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 14 (Positive entraîne continue)**.** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, notée $\|\ \|$.
Soit φ une forme linéaire sur E qui est *positive* en ce sens que si $\forall f \in E,\ f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.
Montrer que φ est continue de $(E, \|\ \|)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (Quasiment du cours...)**.** Justifier la continuité des applications suivantes avec le critère de continuité des applications linéaires ou bilinéaires. Dans le cas des A.L. déterminer leur norme d'opérateur. :
a) Si $(E, \|\ \|)$ est un e.v.n. quelconque, alors l'addition $E \times E \to E,\ (u,v) \mapsto u + v$ est continue.
b) Si $(E, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien, et que $a \in E$ est une vecteur fixé, alors l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R},\ u \mapsto (a|u)$ est continue.
c) Si $(E, \|\ \|)$ est un e.v.n. quelconque, montrer que l'application mult de $\mathbb{R} \times E$ dans E qui à (λ, x) associe $\lambda.x$ (la multiplication externe) est continue.

Exercice 16 (Détermination explicite de normes subordonnées)**.** On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme N_1 et de la norme N_∞, définit par $N_1(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $N_\infty(x_1,\ldots,x_n) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ on considère A comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice A définit l'endomorphisme $X \mapsto AX$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer la norme $|||A|||$ en fonction des entrées $(a_{i,j})$ de A si

a) On considère la norme subordonnée au choix de la norme N_1 au départ et à l'arrivée (on la notera $|||A|||_{\infty,\infty}$)
b) On considère la norme subordonnée au choix de la norme N_∞ au départ et à l'arrivée (on la notera $|||A|||_{1,1}$)
c) On note $(x,y) \mapsto (x|y)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$N_1(x) = \max_{N_\infty(y)=1} |(x|y)|, \qquad N_\infty(x) = \max_{N_1(y)=1} |(x|y)|$$

d) Retrouver le résultat du b) à l'aide de celui du a) et du c).

Exercice 17 (Avatar de la relation de Heisenberg en mécanique quantique)**.** Soient E un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ continus tels que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha\,\mathrm{Id}_E$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha v^n.$$
b) En déduire que $\alpha = 0$.