Banque CCINP : Ex. 37, 39 sauf le 2), 40, 44,45

Exercice 1. a) Rappeler les trois axiomes définissant une norme.
b) Montrer que si N est une norme, et B une boule pour N alors B est convexe.
c) Montrer réciproquement que si N est une application vérifiant les deux premiers axiomes des normes (i.e. tout sauf l'inégalité triangulaire) et telle que l'ensemble $B = \{x \in E,\ N(x) \leq 1\}$ est convexe, alors N est une norme.
Indication – On pourra utiliser un barycentre convenable des points $x/N(x)$ et $y/N(y)$.

Exercice 2 (Applications aux normes N_p)**.** Déduire de l'exercice précédent que si $p \in [1, +\infty[$, la fonction $N_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ définie, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ par $N_p(x) = (\sum_{k=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme.

Exercice 3 (Mines Telecom 2022)**.** On note $E = \mathbf{R}[X]$. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P \in E$, on note

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n dt.$$

a) Montrer que, pour tout $P \in E, N(P) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\theta_n(P)|$ est bien défini.
b) Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 4. Soit $(E, \| \|)$ un e.v.n. On dit que la boule unité B est *strictement convexe* ssi $\forall\ (x, y \in B^2, \forall\ t \in]0,1[,\ x \neq y \Rightarrow \|(1-t)x + ty\| < 1$.
Montrer que si $\| \|$ est une norme euclidienne, alors B est strictement convexe.

Exercice 5. On considère $E = \mathbb{R}^2$ et pour chaque $a \in \mathbb{R}$, et chaque $u = (x, y) \in E$, on note $q_a(u) = x^2 + 2axy + y^2$.
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ peut-on définir une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant $\|u\|_a = \sqrt{q_a(u)}$?

Exercice 6 (Centrale 2 MP 2022)**.** Soient $a_0 < \cdots < a_n$ des entiers distincts. On note $A = (a_0, \dots, a_n)$.
Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\|P\|_A = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |P(a_k)|$.

a) Montrer que $\| \cdot \|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b) La norme $\| \|_A$ est-elle issue d'un produit scalaire ?

Exercice 7. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.

a) On pose $N(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que N définit une norme sur E.
b) On pose $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme équivalente à N.
Indication pour le b) Revoir le cours sur les E.D.

Exercice 8. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on note $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ et $\|A\| = n\|A\|_\infty$.
Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Exercice 9. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $N(A) = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|)$.
a) Montrer que N définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.
b) Montrer que N est multiplicative i.e. $\forall\ (A, B)\ \in M_n(\mathbb{K})^2$, $N(AB) \leq N(A).N(B)$.

Exercice 10. Soit $(E, \| \|)$ un e.v.n.
a) Soit $A \subset E$ un ensemble convexe. Montrer que l'application $f = d_A : E \to \mathbb{R}^+$, $x \in E \mapsto d(x, A)$ est une fonction convexe i.e. $\forall\ (x, y) \in E^2$, $\forall\ t\ \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.
b) soit F un s.e.v. de E. Montrer que d_F est une *semi-norme* c'est-à-dire qu'elle vérifie tous les axiomes des normes sauf la propriété $d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un résultat culturellement incontournable...

Exercice 11 (Des parties denses importantes : des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$)**.** a) Rappeler, avec démonstration, la forme de tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (théorème du cours du chap. A2)).
b) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent des deux sous-groupes triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.
Soit $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}^{+*})$.
Montrer que si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in H$ puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
c) Montrer que si $\alpha = 0$ alors H est dense dans $\mathbb{R}$.
On vient de démontrer le :

Théorème de classification des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ (H.P. mais à connaître au niveau Mines-Centrale) :

$$\boxed{\text{tout sous-groupe de } (\mathbb{R}, +) \text{ est soit de la forme } \alpha\mathbb{Z} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ soit dense dans } \mathbb{R}.}$$