Banque CCINP : Ex. 9,10,11,12,14, 15, 16, 17,18

Exemples de suites de fonctions

Exercice 1. $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$. CVS, CVU de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$?
S'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+$, y-a-t-il convergence uniforme sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \forall\, x \in [0, \dfrac{1}{n}],\ f_n(x) = 0, \\ \forall\, x \in]-\infty, 0[\cup]\dfrac{1}{n}, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n\ln(1-\frac{1}{nx})}. \end{cases}$.

Etudier la CVS et la CVU de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Remarque : sur $]1/n, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{n} g(nx)$ comme cela arrive souvent...

Exercice 3. Soit pour tout $n \in N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos(\dfrac{nx}{n+1})$. Etudier a) la CVS sur $\mathbb{R}$ b) la CVU de la suite (f_n) sur tous les segments.
c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur un voisinage de $+\infty$?

Indication – Au b) on peut utiliser le caractère lipschitzien de cos. Au c) on peut utiliser une suite.

Exemples de séries de fonctions

Exercice 4. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = x\sin(x)\cos(x)^n$.
Etudier la série de fonctions $\sum u_n$: CVS, CVU.

Exercice 5. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$.
Etudier (dans l'ordre le plus approprié) la CVS, CVU, CVN de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{\mathrm{ch}(nx)}$. Etudier la CVS, CVU, CVN de $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, et tout $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.
Etudier la CV normale et la CV uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Indication – Pour la CVU : on pourra faire la majoration $0 \leq R_n(x) \leq x \dfrac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx}}{\ln(n)}$

On va dans $\mathbb{C}$: exp **complexe, fonction ζ complexe**

Exercice 7. a) On note $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(z)$.
Justifier que (S_n) converge uniformément sur tout disque fermé $D_f(0,R)$ de $\mathbb{C}$.
b) On note $f_n(z) = (1+\frac{z}{n})^n$.
En majorant la différence $f_n - S_n$ à l'aide de la formule du binôme, montrer que $f_n - S_n$ CVU vers 0 sur tous les disques fermés $D_f(0,R)$, puis que f_n CV vers exp uniformément sur ces mêmes disques. .
c) Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{i\pi}{n})^n$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{ni\pi}{n^2-1})^n$
d) En adaptant la dém. du b), montrer que si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $(I+\dfrac{A}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(A)$.

Exercice 8.

a) Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Démontrer que $\sum_n n^{-s}$ converge.
   On note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.
b) Montrer que la fonction ζ est continue sur $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
c) Démontrer que $\zeta(s)$ a une limite lorsque $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$.

Exemple d'études de fonctions définies comme somme d'une série

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour les x où cette limite est définie.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et montrer que f est continue sur D_f.
b) Donner un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0^+$.
c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 10. On considère pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = \dfrac{a^n}{x+n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq 1$ et $a \neq 1$.

a) Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.
b) Notons $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de cette série.
   i) Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.
   ii) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
c) Montrer que si $|a| < 1$ alors $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x(1-a)}$.

Exercice 11 (L'incontournable ζ)**.** Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$.

a) Démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Démontrer qu'on a le D.A. à deux termes significatifs suivant pour $\zeta(x)$ lorsque $x \to +\infty$:

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right).$$

Quel serait le terme significatif suivant d'un tel D.A. ?

c) Démontrer que pour $x \to 1^+$, la fonction ζ admet le développement asymptotique suivant :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$

Indication – On pourra montrer qu'en notant $f(n) = n^{-x}$, et $w_n(x) = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$, la série $\sum w_n(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 12 (Sa soeur la fonction zeta alternée)**.**

Soit $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

a) Ensemble de déf., continuité, dérivabilité de α,
b) Etablir, pour $x > 1$, une relation entre $\zeta(x)$ et $\alpha(x)$. *Indication* – On pourra séparer $\alpha(x)$ en termes d'indices pairs et impairs.
c) Retrouver ainsi l'équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \to 1$.

Exercices plus théoriques où la CVS et une prop. part. des fcts donnent la CVU

Exercice 13. Soit d fixé et $E = \mathbb{R}_d[x]$. Soit (f_n) une suite d'éléments de E qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment.

Indication – On peut encore affaiblir l'hyp. en supposant seulement qu'il existe $d+1$ points distincts $x_0 < x_1 < \cdots < x_d$ tels que les $d+1$ suites $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 14. Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *lipschitziennes* de même rapport $k > 0$. On suppose que (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$

Indication – Soit $\varepsilon > 0$. Considérer une subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_q$de $[a,b]$ de pas inférieur à ε/k.